MENENTUKAN SUBGRAF BICLIQUE MAKSIMAL DENGAN PASANGAN POLA TERTUTUP DARI MATRIKS ADJACENCY

Hanna Dewi Marina Hutabarat[1]

Abstrak

Subgraf biclique maksimal, sering juga disebut sebagai subgraf bipartisi komplit maksimal dapat dimodelkan ke banyak aplikasi dari banyak bidang ilmu. Dari hubungan antara subgraf biclique maksimal dengan pola tertutup dari suatu matriks adjacency pada graf tidak berarah dan tanpa lup G diperoleh : (1). Banyak pola tertutup pada matriks adjacency G adalah genap; dan (2). Banyak dari pola tertutup adalah tepat dua kali banyak subgraf biclique maksimal dari G. Dilakukan juga perbandingan hasil dari proses pencarian maksimal biclique subgraf dengan pola tertutup pada matriks adjacency dengan hasil yang dilakukan dengan algoritma konsensus.

Kata Kunci: Subgraf biclique maksimal, Pasangan pola tertutup, Matriks adjacency.

[1] Hana Dewi Marina Hutabarat, Alumni PPs USU, dan Dosen di Universitas Negeri Medan

Pendahuluan

Graf adalah himpunan titik dan garis yang terhubung sebagai grafik dari suatu permasalahan yang ada di sekitar kita. Graf memiliki banyak jenis. Salah satu jenis dari graf adalah graf bipartisi yang memiliki sifat khusus dapat dibagi atau dipartisi menjadi dua subhimpunan titik dari graf tanpa menghilangkan satupun titik atau sisi yang dimiliki graf tersebut. Pada bidang matematika tentang teori graf, graf bipartisi lengkap atau disebut dengan biclique adalah jenis khusus dari graf bipartisi dimana setiap titik dari himpunan titik pertama terhubung ke setiap titik pada himpunan titik kedua. Sebuah graf dalam penggunaannya disajikan dalam bentuk matriks. Hal ini dilakukan untuk mempermudah menyelesaikan suatu permasalahan. Ketertarikan dalam bidang graf dan aplikasinya sangat berkembang dengan pesat, terlebih lagi dalam kaitannya dengan penggunaannya sebagai model diberbagai bidang seperti dalam penelitianmatematika, teknik elektronik, pemprograman komputer, administrasi bisnis, sosiologi, ekonomi, marketing, biologi dan jaringan komunikasi. Pada dasarnya, banyak masalah yang dapat dimodelkan dengan maksimal biclique subgraf yang dibentuk dari mengelompokkan dua subset titik-titik yang saling lepas dari sebuah graf yang dapat menunjukkan hubungan antara keduanya. Maksimal biclique subgraf atau yang sering disebut dengan bipartisi komplit subgraf (Cornaz and Fonlupt,2006) banyak dimodelkan dan digunakan seperti pada bidang komunikasi dan biologi. Contohnya, misalkan terdapat n pelanggan dalam suatu jaringan komunikasi. Beberapa orang memiliki banyak kontak, sedangkan yang lain hanya beberapa. Kelompok pelanggan yang manakah (dengan banyak anggota yang maksimal) yang memiliki interaksi dengan semua anggota kelompok yang lain? Situasi ini dapat dimodelkan dengan graf dengan pelanggan sebagai titik dan komunikasi sebagai sisi.

Penelitian tentang biclique dari suatu graf sangat menarik untuk diteliti, ini terlihat dari banyaknya penelitian mengangkat biclique dari suatu graf menjadi topik permasalahannya, seperti yang dilakukan oleh Vania et. al(2007), Alexa et. al(2004), HochbaumD(1998), Cornaz(2007), Liu et. al(2006) yang membahas tentang biclique dan biclique maksimal pada suatu graf yang banyak diselesaikan dengan algoritma untuk menghitung banyaknya biclique maksimal tanpa adanya perhitungan ganda.

Sebuah graf bipartisi adalah graf dimana himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi mempunyai satu titik ujung di X dan titik ujung lain di Y. Partisi (X,Y) disebut sebuah bipartisi dari sebuah graf. Sebuah graf bipartisi komplit adalah sebuah graf bipartisi sederhana dengan bipartisi (X,Y) dimana setiap titik di himpunan X terhubung ke setiap titik di Y. Jika |X| =m dan |Y | = n maka dinotasikan dengan $K_{m,n}$ (Bondy and Murty, 1982) Sebuah biclique dalam sebuah graf G adalah sebuah subgraf bipartisi komplit dari graf G tersebut (HaemersW,2001). Sebuah biclique H merupakan maksimal biclique di graf G jika dan hanya jika tidak terdapat biclique lain dalam G yang memuat H. Syarat interaksi semua-lawan-semua terhadap sebuah maksimal biclique merupakan keharusan karena jika sebuah sisi saja hilang dari subgraf tersebut dapat mengakibatkan subgraf tersebut bukanlah lagi sebuah maksimal biclique (Li J et al, 2008) . Tentang apakah maksimal biclique dari sebuah graf hanya terdapat satu di setiap graf ataukah sebuah graf bisa memiliki lebih dari satu biclique maksimal merupakan hal yang menarik untuk dilihat.

Sebuah graf dapat dipresentasikan melalui sebuah matrik keterhubungan titik atau disebut matriks adjacency. Sebuah graf akan menghasilkan sebuah matriks simetris dengan masukan diagonalnya 0 dan tanpa masukan negatif jika graf tersebut merupakan graf tanpa loop dan tak berarah. Untuk itu kita tetapkan graf yang diteliti adalah graf tanpa loop dan tanpa arah. Dengan demikian matriks yang akan dihasilkan akan memiliki pola-pola yang didapat dari hasil pengubahan masukan matriks menjadi data transaksi yang mengandung pola yang nantinya akan dipakai sebagai cara menentukan jumlah biclique maksimal dalam graf tersebut. Xiang Y et al (2012) dalam penelitiannya menggunakan matriks adjacency (0,1) sebagai database transaksional dan aplikasi penggunaan transformasi database dalam bidang biologi dengan merepresentasikan 1 sebagai relasi gene-phenotype dan 0 sebagai lambang ketiadaan relasi. Hal ini menunjukkan bahwa transformasi transaksi database dapat digunakan diberbagai bidang.

Penelitian ini membahas lebih dalam hubungan antara maksimal biclique subgraf suatu graf dengan pola tertutup yang ada pada matriks keterhubungan titik (matriks adjacency) dari graf tersebut. Hasil penelitian ini adalah suatu solusi bagaimana menentukan subgraf biclique maksimal dari suatu graf dengan menggunakan pola-pola tertutup yang terdapat pada matriks adjacency graf tersebut.

Sebagai pembanding dilakukan pencarian banyaknya maksimal biclique dengan algoritma consensus yang telah diteliti oleh Alexe G et. al ditahun 2004. Hasil yang didapat dengan menggunakan pola tertutup pada matriks adjacency dan penggunaan algoritma consensus adalah sama.

Graf

Graf G adalah pasangan (V(G),E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut dengan titik, dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut dengan sisi. Sisi e = (u,v) dikatakan menghubungkan titik u dengan titik v. Jika e=(u,v) adalah sisi di graf, maka u dan v dikatakan terhubung langsung (adjacent), u dan e serta v dan e dikatakan terkait langsung (incident), dengan titik ujung u dan v.

Diberikan sebuah graf G=(V,E), graf $H = (V', E')$ adalah sebuah subgraf dari G jika $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ dan $\forall\{u,v\} \in E', u,v \in V'$. Sebuah graf G= (V,E) adalah sebuah bipartisi jika himpunan titik-titik V bisa dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong yang saling terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi di E menghubungkan sebuah titik di V_1 dan sebuah titik di V_2. Karena itu, tidak ada sisi di E yang menghubungkan baik dua titik di V1 ataupun dua titik di V_2. Bipartisi juga dinotasikan dengan $G=(V_1,V_2,E)$. Diberikan sebuah graf bipartisi $G=(V_1 \cup V_2,E)$, sebuah biclique $H=U_1 \cup U_2$ adalah sub himpunan dari himpunan titik-titik sedemikian sehingga untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$, terdapat sebuah sisi antara u dan v yaitu $E = \{\{u,v\}|u \in V_1, v \in V_2\}$ (Dawande et. al, 2001). Ditambahkan Liu et. al (2006) bahwa jika diberikan H adalah sebuah subgraf biclique dari graf G. Jika tidak terdapat biclique subgraf H_2 lain dari G sedemikian sehingga H adalah proper subgraf dari H_2, maka H adalah biclique maksimal dari G. Penentuan ini bukan hanya dilakukan untuk sebuah graf yang dapat dipartisi saja. Namun semua graf G termasuk graf yang tidak dapat dibipartisi karena graf tersebut memiliki cycle ganjil. Karena graf yang memiliki cycle ganjil tidak bisa dibipartisi. Namun semua graf bias memiliki subgraf biparisi. Dimana sebuah graf mampu memiliki banyak subgraf bipartisi komplit atau dikenal dengan subgraf biclique. Dengan begitu akan terdapat banyak biclique subgraf yang dimiliki sebuah graf. Permasalahannya kemudian adalah bagaimana menentukan yang mana yang merupakan subgraf biclique maksimalnya.

Transformasi matriks adjacency

Banyak penelitian yang dilakukan sehubungan dengan penentuan subgraf biclique maksimal pada graf. Salah satu hal yang dapat dilakukan adalah dengan mencari hubungannya dengan matriks adjacency. Matriks adjacency adalah bentuk penyajian graf dalam angka dimana terdapat hubungan dua himpunan titik (boleh dari satu titik himpunan yang sama maupun dari dua himpunan titik yang berbeda) dengan ketentuan mendapat nilai satu jika terdapat keterhubungan titik dan nol jika tidak terdapat keterhubungan titik, v_i untuk baris dan v_j untuk kolom. Sebuah matriks adjacency dapat ditransformasi ke sebuah transaksional database (DB)(Agrawal et. al, 1993). Sebuah DB adalah multi himpunan tak kosong dari transaksi. Sebuah transaksi adalah himpunan bagian dari himpunan item (I). Setiap transaksi T di DB dilambangkan dengan id(T). Transformasi matriks ke database dilakukan dengan cara menggantikan kolom v_j menjadi item dalam transaksi dan baris v_i menjadi lingkungan dari transaksi item tersebut.

Sehingga baris menjadi himpunan transaksi dan kolom menjadi himpunan item. Sebuah pola, atau dikenal dengan himpunan item adalah himpunan tak kosong dari item(I). Diberikan sebuah DB dan sebuah pola (P), banyaknya transaksi di DB yang mengandung P disebut support dari P dinotasikan dengan $sup^{DB}(P)$. Sebuah pola P disebut pola tertutup dari DB jika dan hanya jika $CL^{DB}(P)=P$. Li J et.al (2005) mengatakan dalam hasil penelitiannya bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara maksimal subgraf bipartisi dengan pasangan pola tertutup dari suatu matriks adjacency. AlexeGet.al (2004) menemukan suatu algoritma yang mampu menghitung jumlah subgraf biclique maksimal dari suatu graf G. Dengan ini akan kita bandingkan hasil yang didapat dari penentuan maksimal biclique subgraf dengan pola tertutup pada matriks adjacency dengan penggunaan algoritma konsensus yang diperkenalkan Alexe G et. al (2004) tersebut.

GRAF BIPARTISI DAN MATRIKS ADJACENCY DARI GRAF

Sebuah graf G adalah pasangan (V(G),E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut dengan titik, dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut dengan sisi. Nama ”graf” diberikan karena graf dapat disajikan dalam grafik atau gambar, dan justru dengan bentuk gambar inilah sifat-sifat grafik dapat dikenali secara detail. Sisi e=(u,v) menghubungkan titik u dan v. Jika e=(u,v) adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (adjacent), titik u dan titik v dan sisi e disebut terkait langsung (incident).

Graf Bipartisi

Graf bipartisi adalah sebuah graf yang mempunyai sifat khusus yang berkaitan dengan titik, sisi dan derajatnya. Sebuah graf G=(V,E) dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 dan dinotasikan dengan $G=(V_1,V_2,E)$. Jika graf G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r\geq 1$,maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan partisi-n jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1,V_2, . . . ,V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j untuk $i \neq j$. Jika n=3, maka graf partisi-n disebut tripartisi. buah graf G=(V1,V2,E) disebut bipartisi komplit jika graf G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis Km,n. Graf bipartisi komplit dengan $K_{1,n}$ disebut graf bintang (star) dan dinotasikan dengan Sn. Jadi Sn mempunyai order (n-1) dan ukuran n.

Teorema 1 (AsratianA.S (1998)) Sebuah graf G adalah graf bipartisi jika dan hanya jika G tidak mempunyai cycle ganjil.

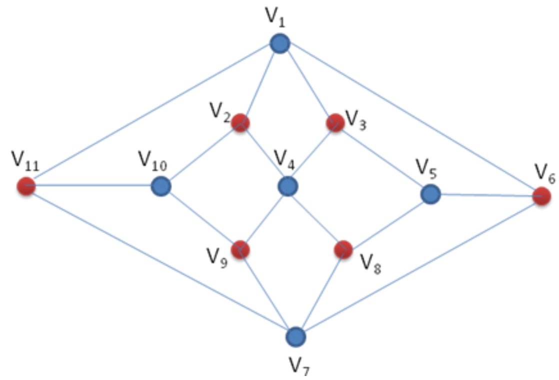
Bukti : Andaikan Gadalah sebuah graf bipartisi dengan partisi (V_1,V_2) dan $C = v_0v_1v_2 \ . \ . \ .v_kv_0$ adalah sebuah cycle di G. Tanpa menghilangkan keumumannya, kita asumsikan $v_0 \in V_1$. Maka, karena Ggraf bipartisi, v_1 haruslah sebuah titik di subset V_2. Tentu kita harus punya $v_{2i} \in V_1$ dan $v_{2i+1} \in V_2$. Karena itu k haruslah ganjil, dan C adalah sebuah cycle genap. Jelas bahwa ini cukup untuk membuktikan dengan konvers jika G terhubung. Kita tetapkan sebuah partisi dari V(G) dengan aturan :

$V_1 =\{u \in V(G) : d_G(u,v)$ adalah genap$\}$,

$V_2 =\{u \in V(G) : d_G(u,v)$ adalah ganjil$\}$.

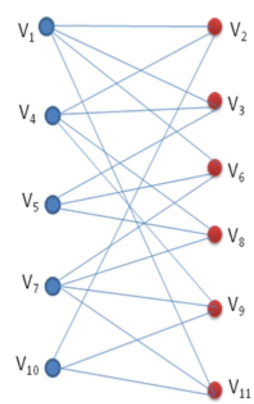
Tinggal menunjukkan bahwa (V_1,V_2) memang sebuah partisi di G. Andaikan x dan y adalah dua titik di V_1, sehingga xy $\in$ E(G). Andaikan P menjadi lintasan terpendek (x,v), Q menjadi lintasan terpendek (y,v) dan v_1 menjadi titik temu pertama dari P dan Q. Jelas bahwa sejak P dan Q adalah lintasan-lintasan terpendek, maka bagian (v_1,v) jugamerupakan lintasan terpendek (v_1,v). Faktanya mereka memiliki panjang yang sama. Andai P_1 dan Q_1 berturut-turut adalah bagian (x,v_1) dan (y,v_1) dari P danQ. Maka karena P danQ memiliki panjang yang sama menyebabkan P_1 dan Q_1 juga memiliki kesamaan yang sama. Maka tidak ada dua titik di V_1 yang bertetangga. Begitu juga di V_2, tidak terdapat dua titik yang saling bertetangga. Maka (V_1,V_2) memang merupakan sebuah partisi di G.

Contoh :



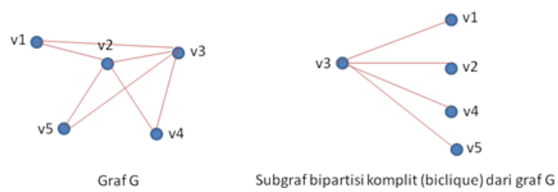
Gambar 1. Graf G yang bisa dibipartisi

Graf G diatas tidak memiliki cycle ganjil sehingga bisa dibipartisi menjadi graf bipartisi tanpa menghilangkan satupun titik ataupun sisi yang dimilikinya sebelum dibipartisi. Sebuah graf terhubung memiliki bipartisi yang unik. Berikut adalah gambar graf bipartisi dari graf G pada gambar 1 diatas.



Gambar 2. Graf bipartisi dari graf G

Terlihat bahwa graf tersebut bukanlah graf bipartisi komplit sehingga graf tersebut tidak dapat dijadikan biclique subgraf dari graf itu sendiri. Jika suatu graf tidak dapat dibipartisi dengan tetap mempertahankan semua titik dan sisinya maka graf tersebut bukanlah graf bipartisi tapi hanya akan memiliki subgraf bipartisi saja.



Gambar 3. Biclique Subgraf dari G

Graf G pada gambar 3 diatas memiliki cycle dengan panjang ganjil maka graf tersebut tidak dapat dipartisi tanpa menghilangkan satupun titik ataupun sisi didalamnya. Dengan kata lain graf tersebut bukanlah graf bipartisi. Untuk graf yang ada disampingnya tersebut merupakan sebuah subgraf bipartisi komplit (biclique) dengan $V_1 = \{v_3\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Sebuah subgraf biclique dapat disebut subgraf biclique maksimal jika kita tidak mungkin menambahkan sisi lagi ke himpunan sisi $\langle V_1 \cup V_2, E \rangle$, yang berarti subgraf tersebut mengandung tepat semua sisi yang berawal di V_1 dan berakhir di V_2.

Definisi 1 Sebuah bipartisi $G=(V_1,V_2,E)$ disebut biclique jika untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$, terdapat sebuah sisi antara u dan v, yaitu $E=\{\{u,v\} | u \in V_1, v \in V_2\}$

Subgraf Bipartisi

Sebuah graf G=(V,E) terdiri dari himpunan titik V dan himpunan sisi E dengan $E \subseteq V \times V$. Diasumsikan G merupakan sebuah graf tak berarah dan tanpa lup, yaitu tidak terdapat $(u,u) \in E$ dan setiap $(u,v) \in E$ adalah pasangan sisi tak berurut. Sebuah graf $H = \langle V', E' \rangle$ yang dilambangkan dengan kurung siku adalah sebuah subgraf dari graf G jika dan hanya jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Himpunan sisi E dari biclique $G=(V_1,V_2,E)$ dapat ditentukan dengan dua himpunan titik V_1 dan V_2, maka kita dapat mengabaikan himpunan sisi dan menunjukkan sebuah biclique G sebagai $G=(V_1,V_2)$. Diberikan G=(V,E) adalah sebuah graf tak berarah, V_1 dan V_2 adalah dua subset dari V. Jika V_1, V_2 dan semua sisi-sisi antara V_1 danV_2 membentuk sebuah biclique subgraf dari G, maka V_1 dan V_2 dikatakan membentuk sebuah biclique subgraf dari G. Berdasarkan definisi tersebut, untuk setiap subset V_1 dari V, V_1 dan $\Gamma(V_1,G)$ membentuk sebuah biclique subgraf dari G.

Definisi 2 Sebuah graf $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ adalah maksimal biclique subgraf jika H adalah biclique subgraf dari G sedemikian sehingga $\beta^G(V_1) = V_2$ dan $\beta^G(V_2) = V_1$.

Sebuah subgraf bipartisi komplit $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ dari graf G sedemikian sehingga $\beta^G(V_1) = V_2$ dan $\beta^G(V_2) = V_1$ adalah maksimal dengan artian bahwa tidak terdapat subgraf bipartisi komplit lain $H' = \langle V_1' \cup V_2', E' \rangle$ dari G dengan $V_1 \subset V_1'$ dan V_2' sedemikian sehingga $\beta^G(V_1') = V_2'$ dan $\beta^G(V_2') = V_1'$

Matriks Adjacency

Gambar merupakan cara yang mudah untukmenjelaskan suatu graf. Tetapi cara ini tentunya mempunyai kelemahan ketika akan menyimpan data tentang graf dalam komputer, atau ketika akan mengkaji sifat-sifat suatu graf melalui hitungan matematis. Merepresentasikan graf dalam bentuk matriks akan memberikan kemudahan bagi seseorang yang senang menggunakan komputer ketika mengkaji informasi atau menyelesaikan permasalahan yang melibatkan graf. Matriks keterhubungan titik atau matrik adjacency dari suatu graf G dinotasikan dengan A(G) adalah matriks (p×p) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0

jika titik vi tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G)= [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan titik suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsure 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel. Pada graf bipartisi, matriks keterhubungan titik (matriks adjacency) dilambangkan dengan

$$H \begin{pmatrix} 0_{r,r} & B \\ B^T & 0_{s,s} \end{pmatrix}$$

dimana B adalah matriks r×s dan 0 merepresentasikan matriks 0. Jelas bahwa matriks B merepresentasikan sebuah graf bipartisi dan sering disebut matriks biadjacency. G= (U,V,E) merupakan graf bipartisi dengan partisi $U = u_1, \ldots, u_r$ dan $V = v_1, \ldots, v_s$. Matriks biadjacency B adalah r ×s matriks 0-1 dimana $b_{ij} = 1$ jika dan hanya jika $(u_i, v_j) \in E$.

Pola tertutup dari matriks adjacency

Sebuah matriks adjacency dari sebuah graf dapat ditransformasikan menjadi transaction database (DB) (R. Agrawal et.al(1993)). Untuk menentukan DB, kita mendefinisikan transaksi lebih dulu. Misalkan I adalah himpunan item. Lalu transaksi itu didefinisikan sebagai subset dari I. Sebuah DB adalah sebuah multi himpunan yang tak kosong dari transaksi-transaksi. Setiap transaksi T dalam DB dilambangkan sebagai id(T). Sebuah pola ditetapkan sebagai himpunan tak kosong dari I. Sebuah pola bisa dimiliki atau tidak dimiliki oleh sebuah transaksi.

Definisi 3 Sebuah transaksi database (DB) adalah multi himpunan tak kosong dari transaksi-transaksi. $DB = \{\cup\ T \mid T \subseteq I, T\ = \emptyset\}$.

Diberikan sebuah DB dan pola P, maka jumlah transaksi di DB yang mengandung P disebut support atau pendukung dari P dan dinotasikan dengan $Sup^{DB}(P)$. Diberikan sebuah graf G dengan $V^G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Jika setiap titik v_i di V^G ditetapkan sebagai sebuah item, maka lingkungan $\beta^G(V_1)$ adalah sebuah transaksi.

Jadi, $\{\beta^G(v_1), \beta^G(v_2), \ . \ . \ . \ , \beta^G(v_2)\}$ adalah sebuah DB. Identitas dari suatu transaksi di DB^G ,dimana DB^G adalah database dari graf G, ditetapkan sebagai titik itu sendiri, yaitu $id(\beta^G(V_1)) = v_i$.

DB^G dapat direpresentasikan sebagai matriks biner yang didefenisikan dengan

$$B[i,j] = \begin{cases} 1 & ,\text{jika } v_j \in \beta^G(v_i) \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Karena $v_j \in \beta^G(v_i)$ jika dan hanya jika $(v_i, v_j) \in E^G$, dapat kita lihat A = B.

Maka "sebuah pola dalam DB^G" equivalent dengan " sebuah pola dari matriks adjacency dari G".

$CL^D(P) = g(f^D(P))$ dikatakan penutup dari P dengan $f^D(P)$ adalah semua transaksi di D yang memuat pola P. Diberikan I adalah himpunan item, dan D adalah sebuah transaksi database yang ditetapkan di I. Untuk sebuah pola P ⊆ I, berikan $f^D(P) = \{T \in D | P \subseteq T\}$, yaitu $f^D(P)$ adalah semua transaksi di D yang mengandung pola P.

Definisi 4 Sebuah pola P adalah sebuah pola tertutup di DB jika dan hanya jika $CL^{DB}(P) = g(f^{DB}(P))$=P dengan $f^{DB}(P)$ adalah semua transaksi di DB yang memuat pola P.

Definisi 5 Himpunan kejadian (occurence) dari pola P pada DB sebagai $occ^{DB}(P) = \{id(T) | T \in DB, P \subseteq T\} = \{id(T) | T \in f^{DB}(P)\}$.

Proposisi 3.1 (Li J et al (2004)) Jika G sebuah graf dan P pola dari DB_G, maka $occ^{DB_G}(P) = \beta^G(P)$

Bukti : Jika $v \in occ(P)$, maka v bertetangga dengan setiap titik di P. Oleh karena itu, $v \in \beta(v')$ untuk setiap $v' \in P$ dimana $v \in \bigcap_{v' \in P} \beta(v') = \beta(P)$. Jika $u \in \beta(P)$, maka u bertetangga ke setiap titik di P. Sehingga, $\beta(u) \supseteq P$. Karena itu, $\beta(u)$ adalah transaksi di DB_G yang memuat P. sehingga $u \in Occ(P)$

Proposisi 3.2 (Li J et al (2004)) Jika sebuah graf G dan sebuah pola P di DB_G dengan $\beta^G(\beta^G(P)) = CL^{DB_G}(P)$ maka $\beta^G \circ \beta^G$ adalah sebuah operasi tertutup pada pola di DB_G

Bukti : Dari proposisi 3.1, $\beta(\beta(P)) = \beta(occ(P)) = \bigcap_{id(T) \in occ(P)} T = \bigcap_{T \in f(P)} T = g(f(P)) = CL(P)$

Proposisi 3.3 (Li J et al (2004)) Misalkan G sebuah graf dengan C_1 dan C_2 adalah dua pola tertutup di DB_G, $C_1 = C_2$ jika dan hanya jika $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$

Bukti :

(⇒) : Jika $C_1 = C_2$ maka $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$. Ini jelas karena dari proposisi 3.1 menyatakan bahwa occurance (occ) dari sebuah pola adalah lingkungan dari pola itu sendiri maka jika $C_1 = C_2$ pastilah $Occ^{DB_G}(C_1) = Occ^{DB_G}(C_2)$.

$\Leftarrow$) : Andaikan $Occ^{DB^G}(C_1) = Occ^{DB^G}(C_2)$ dan $id(T) \in occ(P)$ jika dan hanya jika $T \in f(P)$. Maka kita ambil $f(C_1) = f(C_2)$ dari $Occ(C_1) = Occ(C_2)$. Karena C_1 dan C_2 adalah pola tertutup di DB_G, maka $C_1 = g(f(C_1)) = g(f(C_2)) = C_2$. Terbukti.

Lemma 3.2 (Li J et al (2004)) Jika G sebuah graf, dan C adalah sebuah pola tertutup dari DB_G maka $f^{DB_G}\ (occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c) | c \in C\}$

Bukti : Karena C adalah sebuah pola tertutup, maka $\{c | c \in C\}$ adalah semua dan hanya item-item yang termasuk disetiap transaksi di DB_G yang mengandung C. Ini equivalen dengan {c|c ∈C} adalah semua dan hanya titik-titik di G yang beradjacent ke setiap titik di $occ(C)$. Ini mengakibatkan bahwa $\{\beta^G(c) | c \in C\}$ adalah semua dan hanya transaksi-transaksi yang mengandung occ(C). Dengan kata lain $f^{DB_G}\ (occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c) | c \in C\}$.

Proposisi 3.4 (Li J et al (2004)) Jika G adalah graf dan C adalah sebuah pola tertutup di DB_G maka $occ^{DB_G}(C)$ juga merupakan pola tertutup di DB_G

Bukti : Dari lemma diatas yaitu $f^{DB_G}\ (occ^{DB_G}(C)) = \{\beta^G(c) | c \in C\}. CL(occ(C)) = g(f(occ(C))) = \bigcap f(occ(C)) = \bigcap_{c \in C} \beta(c) = \beta(C)$.
Dengan proposisi 3.1, $\beta(C) = occ(C)$. Jadi $occ(C)$ adalah sebuah pola tertutup.

Proposisi 3.5 (Li J et al (2004)) Jika G adalah graf dan C adalah pola tertutup di DB_G. Maka C dan himpunan kejadiannya memiliki perpotongan kosong, yaitu $occ^{DB_G}(C) \cup C = \emptyset$

Bukti : Jika $v \in occ(C)$ maka v bertetangga ke semua titik di C. Karena kita asumsikan G adalah sebuah graf tanpa lup, $v \notin C$ maka $occ^{DB_G}(C) \cup C = \emptyset$

Proposisi 3.5 ini menyatakan bahwa tidak ada pola tertutup yang dipasangkan dengan dirinya sendiri.

Himpunan Konsensus

Untuk membandingkan hasil yang kita dapat apakah akan sejalan dengan yang telah dilakukan Alexe G et. al (2004) maka kita perlu mendefinisikan terlebih dahulu tentang himpunan konsensus.

Definisi 6 (Enver Kayaaslan (2010)) Diberikan sebuah graf bipartisi $B = (V_1, V_2, E)$, untuk sebuah subset $U_1 \subseteq V_1$ atau $U_2 \subseteq V_2$, himpunan konsensus $P_{V_2}(U_1)$ atau $P_{V_1}(U_2)$ adalah perpotongan dari himpunan tetangga dari setiap titik $x \in U_1$ atau $y \in U_2$, yaitu

$P_{V_2}(U_1) = \bigcap_{x \in U_1} \beta_{V_2}(x)$ dengan

$P_{V_1}(\emptyset) = P_{V_2}(\emptyset) = \emptyset$

Teorema 3.3 (Enver Kayaaslan (2010)) Jika $(U_1, U_2) \neq \emptyset$ adalah sebuah biclique maksimal jika dan hanya jika $U_2 = P_{V_2}(U_2)$ dan $U_1 = P_{V_1}(U_2)$.

Bukti : Misalkan $(U_1, U_2) \neq \emptyset$ adalah sebuah biclique dan $U_1 \subseteq P_{V_1}(U_2)$ dan $U_2 \subseteq P_{V_2}(U_2)$. Dari definisi maksimalitas, (U_2, U_2) adalah biclique maksimal jika dan hanya jika tidak terdapat $y \in V_2/U_2$ sedemikian sehingga (U_1,y) adalah biclique dan sama halnya dengan tidak terdapatnya $y \in V_2/U_2$ sedemikian sehingga (x, U_2) juga adalah biclique. Ini ekuivalen dengan tidak terdapatnya $y \in V_2/U_2$ sedemikian sehingga $y \in P_{V_1}(U_2)$ dan tidak terdapat $x \in V_1/U_2$ sedemikian sehingga $x \in P_{V_1}(U_1)$. Ini ekuivalen dengan $U_2 = P_{V_2}(U_2)$ dan $U_1 = P_{V_1}(U_2)$.

Lemma 3.4 (Enver Kayaaslan (2010)) Untuk setiap $U_2 \subseteq V2, U_2 \subseteq P_{V_2} P_{V_1}(U_2)$. Sama halnya dengan, untuk setiap $U_1 \subseteq V_1$, $U_1 \subseteq P_{V_1}$ ($P_{V_2}(U_1)$)

Bukti : Perhatikan sebuah titik y ∈ U_2 Karena ($P_{V_1}(U_2)$, U_2) adalah biclique, ($P_{V_1}(U_2)$,y) juga adalah sebuah biclique. Jadi, $y \in P_{V_2}$ ($P_{V_1}(U_2)$) dimana disimpulkan bahwa $U_2 \subseteq P_{V_2}$ ($P_{V_1}(U_2)$). Sama halnya dengan pembuktian untuk $U_1 \subseteq P_{V_1}$ ($P_{V_2}(U_1)$)

Hasil dan Pembahasan

Dari sebuah graf bisa dibentuk banyak subgraf, tergantung pada banyak titik dan sisi yang terkandung didalamnya. Semakin banyak titik dan sisi maka akan semakin banyak pula subgraf yang bisa kita bentuk dari sebuah graf. Subgraf biclique maksimal dari sebuah graf merupakan subgraf dengan ketentuan seperti yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya. Akankah terdapat perbedaan mendapatkan sebuah biclique maksimal dari sebuah graf yang dapat dibipartisi dengan sebuah graf yang bukanmerupakan graf bisa dibipartisi?

Mendapatkan sebuah subgraf bipartisi komplit (biclique) dari sebuah graf yang sudah dibipartisi sangat mudah untuk dilakukan karena graf awalnya sudah dapat dibipartisi. Jika sebuah graf bisa dibipartisi maka untuk maksimal subgraf bipartisinya sama dengan graf itu sendiri. Namun apakah subgraf tersebut merupakan biclique haruslah memenuhi syarat bahwa setiap anggota di subset yang satu terhubung ke setiap anggota yang ada di subset yang lainnya. Jika demikian maka dapat dikatakan bahwa subgraf tersebut merupakan subgraf biclique dari graf awal.

Teorema 4.1 (Li J et al (2004)) Misalkan G graf tanpa arah dan tanpa lup. Jika C sebagai pola tertutup di DB_G maka

$H = \langle C \cup occ^{DB_G}(C), C \times occ^{DB_G}(C) \rangle$ adalah subgraf biclique maksimal di G.

Bukti : Asumsikan, C adalah tak kosong dan C memiliki tak nol support di DB_G. Karena itu occ(C) tak kosong dan dari proposisi 3.5 yaitu $C \cap occ^{DB_G}(C) = \emptyset$. Selanjutnya, untuk setiap $v \in occ(C)$, v bertetangga dengan semua titik C di G. Jadi $C \times occ(C) \subseteq E^G$, dan setiap sisi di H terhubung

dengan sebuah titik di C dan sebuah titik di occ(C). Maka H adalah subgraf biclique di G. Dengan proposisi 3.1 yakni $occ^{DB_G}(P) = \beta^G(P)$, dengan proposisi 3.2, $C = \beta^G(\beta^G(C))$. Dengan proposisi 3.1, kita peroleh $C = \beta^G(occ^{DB_G}(C))$. Sehingga H adalah maksimal. Terbukti.

Teorema 4.2 (Li J et al (2004)) Misalkan G sebagai sebuah graf tanpa arah dan tanpa lup. Graf $H = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ adalah sebuah maksimal biclique atas G. Maka V_1 dan V_2 adalah dua pola tertutup di DB_G, $occ^{DB_G}(V_1) = V_2$ dan $occ^{DB_G}(V_2) = V_1$

Bukti : Karena H adalah subgraf biclique maksimal di G, lalu β(V_1) = V_2 dan $\beta(V_2) = V_1$. Dengan proposisi 3.2, $CL(V_1) = \beta(\beta(V_1)) = \beta(V_2) = V_1$. Lalu, V_1 1 adalah pola tertutup. Hal yang sama dapat dilakukan untuk mendapatkan V_2 sebagai pola tertutup. Dengan proposisi 3.1 , occ(V_1) = β(V_1) = V_2 dan $occ(V_2) = \beta(V_2) = V_1$ Terbukti.

Proposisi 3.4 dan proposisi 3.5 menimbulkan akibat yang menyatakan bahwa banyak pola tertutup pada DB_G adalah genap.

Corollary 4.1 Jika G sebuah graf maka banyak pola tertutup pada DB_G adalah genap.

Bukti :Anggap terdapat n pola tertutup yang muncul paling sedikit 1 kali pada DB_G, notasikan sebagai $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dari proposisi 3.4 menyatakan bahwa setiap himpunan kejadian Occ(C_1), Occ(C_2), . . . ,Occ(C_n) jugamerupakan pola tertutup di DB_G dan dari proposisi 3.5 menyatakan bahwa tidak ada pola tertutup yang dipasangkan dengan dirinya sendiri maka berapapun banyaknya n pola tertutup pada DB_G selalu terdapat 2×n pola tertutup yang selalu saling berpasangan dengan himpunan kejadiannya. Sehingga banyak pola tertutup pastilah genap. Pada penelitian yang dilakukan oleh Alexe G et. al (2004) menghasilkan sebuah algoritma pencarian biclique maksimal yaitu algoritma konsensus dengan proses seperti yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya.

Perlu diperhatikan bahwa suatu biclique dikatakan maksimal jika tidak dapat menambahkan lagi sisi pada subgraf tersebut. Dalam artian bahwa titik dalam subgraf tersebut harus memiliki derajat titik paling tinggi atau merupakan derajat titik pada graf awal sehingga tidak dapat menambahkan sisi lagi pada titik tersebut. Untuk G = (V_1 ∪ V_2, E) jika $v_i \in V_1$ memiliki derajat titik m maka biclique maksimalnya akan memiliki m titik yang menjadi element di V_2. V_1 akan memiliki banyak titik lebih dari satu jika $v_i \in V_1$ memiliki tetangga yang sama sedemikian sehingga tidak merubah jumlah titik pada V_2.

Berikut adalah cara menentukan subgraf biclique maksimal menggunakan pasangan pola tertutup :

• Ubah graf tanpa arah dan tanpa lup ke bentukmatriks adjacency dari graf tersebut sehingga diperoleh matriks-(0,1);

• Transformasikan matriks ke database dengan cara menggantikan kolom v_j menjadi item dalam transaksi dan baris v_i menjadi lingkungan dari transaksi item tersebut. Sehingga baris menjadi himpunan transaksi dan kolom menjadi himpunan item;

• Tentukantransaksi database dari database tersebutdengancaramengumpulkan

ataumenghimpun transaksi-transaksi yang dipunya oleh setiap item;

• Iriskan transaksi-transaksi tersebut sehingga mendapatkan pola tertutup;

• Setelah itu dicari pasangandari setiap pola tertutup tersebut dengan mengambil himpunan kejadian(occ) dari setiap pola tertutupnya dengan cara mengambil lingkungan (β) dari pola tertutup tersebut berdasarkan tabel transformasi transaksi atau dari matriks adjacencynya;

• Pasangan pola tersebut akan menjadi dua himpunan yang membentuk subgraf biclique;

• Pasangan-pasangan yang terbentuk merupakan subgraf biclique maksimal dari graf tersebut. Selesai.

Dari penelitian ini dihasilkan pernyataan bahwa banyak dari pola tertutup adalah tepat dua kali banyak maksimal biclique subgraf dari G. Untuk semua subgraf biclique maksimal selalu terdapat sebuah pasangan unik dari pola tertutup yang menyatukan dua buah himpunan vertex dari sebuah subgraf. Hasil yang didapat bila dilakukan dengan cara penggunaan algoritma dengan membipartisi terlebih dahulu sampai pada menghasilkan subgraf bipartisi komplit maksimal akan sama bila dilakukan dengan cara mentransformasi matriks adjacency ke database, mendapatkan pasangan pola tertutupnya sampai pada menghasilkan subgraf bipartisi komplit yang maksimal atau disebut dengan subgraf biclique maksimal.

Diharapkan akan ada lagi penelitian yang bisa mengembangkan ilmu graf terutama dalam topik graf khususnya maksimal biclique subgraf, sehingga bias diperoleh cara menampilkan semua maksimal biclique subgraf dari suatu graf walaupun bukan merupakan graf

bipartisi. Dan bisa mengembangkan ke arah .
multi-partisi subgraf.

DAFTAR PUSTAKA

Agrawal. R, Imielinski .T, dan Swami .A(1993)Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases *Proceedings of the 1993 ACM-IGMOD international Conference onManagement of Data*. 207-216.

Alexe.G, Alexe.S, Crama .Y, Foldes. S, P. L. Hammer, and B. Simeone(2004), Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques. *Discrete Applied Mathematics* 145(1), pp. 11-21.

Asratian A. S, Tristan M. J. Denley and Roland Haggkvist (1998) ”Bipartite Graphs and Their Application”, Cambridge Tracts inMathematics 131.

Bondy J. A. and U. S. R. Murty (1982) Graph Theory with Applications. NorthHolland. Brualdi R.A and Herbert J. Ryser,(1991) ”Combinatorial Matrix Theory”, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Cornaz D(2007). The maximum induced bipartite subgraph problem with edge weights. *SIAM J. Discrete Math* 21(3), 662–675.

Cornaz D and Jean Fonlupt(2006) Chromatic characterization of biclique cover *Discrete Mathematics* 306(5), 495-507

Dawande.M, Pinar Keskinocak, Jayashankar M. Swaminathan and Sridhar Tayur (2001) On Bipartite and Multipartite Clique Problems. *Journal Of Algorithms* 41,388-403

Enver Kayaaslan (2010) On Enumerating All Maximal Biclique of Bipartite Graphs *CTW* 2010

Eppstein D (1994). Arboricity and bipartite subgraph listing algorithms. *Information Processing Letters* 51:207–211.

Godsil C and Gordon Royle (2000)Algebraic Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics* 207. Springer.

Haemers Willem H(2001) Biclique and Eigen values *Journal of Combinatorial Theory* Series B 82, 56-66

Hochbaum Dorit S (1998). Approximating Clique and Biclique problems. *Journal of algorithms*, 29,174–200.

Li. J,HaiquanLi,Donny Soh, danLimsoonWong (2005)Acorrespondence between maksimal complite bipartite subgraph and closed pattern *Knowledge Discovery in Databases;PKDD 2005 Lecture Notes in Computer Science* 3721, 146-156

Liu G , Kelvin Sim, Jinyan Li (2006) Efficient Mining of Large Maximal Bicliques. *Data Warehousing and knowledge discovery. Lecture Notes in Computer Science*, 4081: 437–448.

Liu Y, Aixin Sun, Han T Loh, Wen F Lu and Ee-Peng Lim (2008). Advances of Computational Intelegence in Industrial Systems. *Studies in Computational Intelligence* Vol 116: 99–116.

Lowell W. Beineke, Robin J. Wilson and Peter J. Cameron(2004) Topics In Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press.

Marcus Daniel A. (2008). ”Graf Theory. A Problem Oriented Approach”, The Mathematical Association of America. (Incorporated)

Vania M.F. Dias, Celine M.H. de Figueiredo and Jayme L. Szwarcfiter. (2007). On the generation of bicliques of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 155(2007) : 1826-1832.

Yan. X and Jiawei Han (2003) Closed Graph: Mining Closed Frequent Graph Pattern. *Conference on Knowledge discovery and data mining* 286-295.

Yang Xiang, Philip R.O. Payne, and Kun Huang (2012) Transactional Database Transformation and Its Application in Prioritizing Human Disease *Genes IEEE/ACM Trans Comput Biol Bioinform* 9(1) :294-304.