

KESALAHAN PENALARAN MATEMATIS PADA MATERI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Suryanti*¹, Cicik Pramesti², dan Riki Suliana Ranggawati Sidik³

^{1,2,3}Universitas PGRI Adi Buana

* Corresponding Author: suryanti@unipasby.ac.id

ARTICLE INFO

Article history:

Received Mar 10, 2022

Revised April 1, 2022

Accepted April 25, 2022

Available online April 30, 2022

Kata Kunci:

Kesalahan, penalaran matematis, persamaan diferensial.

Keywords:

Errors, mathematical reasoning, differential equation

ABSTRAK

Penalaran matematis merupakan kegiatan berpikir yang menghubungkan berbagai fakta, sifat, pola hubungan pada penyelesaian masalah sehingga diperoleh generalisasi yang logis. Tidak sedikit kesalahan terjadi dalam proses penyelesaian persamaan diferensial. Penyelidikan sangat diperlukan terhadap proses bernalar dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial Tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan kesalahan penalaran matematis mahasiswa pada materi persamaan diferensial. Penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif dengan instrumen tes dan pedoman wawancara. Penelitian dilakukan pada 5

subjek yaitu mahasiswa semester 6. Hasil penelitian menunjukkan kesalahan penalaran matematis paling banyak pada indikator menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi. Pada proses penalaran kesalahan penalaran banyak dilakukan pada merencanakan penyelesaian, manipulasi matematis, dan membuat kesimpulan.

ABSTRACT

Mathematical reasoning is a thinking activity that connects various facts, characteristics, pattern of relationships in problem solving so that logical generalizations are obtained. Not a few errors occur in the process of solving differential equation. An investigation is needed on the reasoning process in solving differential equation problems. The purpose of this research is to describe students' mathematical reasoning errors in the differential equation material. This research is a qualitative descriptive with test instruments and interview guidelines. The research was conducted on 5 subjects, namely 6th semester students. The results showed that the most mathematical reasoning errors were indicators using relationship patterns to analyze the situation. In the reasoning process, many reasoning errors are made in planning solutions, mathematical manipulation, and making conclusions.

This is an open access article under the [CC BY-NC](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) license.

Copyright © 2021 by Author. Published by Universitas Bina Bangsa Getsempena



PENDAHULUAN

Pada era industri, pendidikan berperan besar dalam menciptakan pembelajaran yang efektif, sebagaimana yang disampaikan (Tan, 2004) belajar melalui observasi, keterampilan proses, *problem solving skills*, dan keterampilan berpikir. Kemampuan seseorang untuk berpikir lebih kompleks serta melakukan penalaran dan pemecahan

masalah disebut sebagai kemampuan kognitif (Desmita, 2012). Dalam menyelesaikan persamaan diferensial perlu menggunakan pemikiran matematis melalui investigasi dan mengidentifikasi pengetahuan matematika yang telah dipelajarinya. Hal ini sejalan dengan pendapat Stacey (Isoda & Katagiri, 2012) pentingnya berpikir matematika dan memilih memasang aktivitas "*specilaizing and generalize*" dan "*Conjecturing and convincing*". Generalisasi merupakan hasil dari berpikir nalar. Proses *conjecturing* melalui penalaran induktif adalah proses menghasilkan *conjecture* melalui penalaran induksi (Sutarto & Hastuti, 2010). Koneksi antar konsep atau idea matematika akan memfasilitasi kemampuan mahasiswa dalam memformulasikan dan memverifikasi konjektur secara induktif dan deduktif (Permana & Sumarmo, 2007).

Kemampuan perkembangan berpikir matematis yang dikembangkan Shafer dan Foster (Farida Kurniawati et al., 2021) terbagi menjadi tiga level yaitu reproduksi, koneksi, dan analisis. Klasifikasi berpikir matematika (Li et al., 2019) juga didasarkan pada kemampuan strategis, logis dan manipulatif. Pada jenis strategis, berpikir tentang transformasi, abstraksi dan membuat kesimpulan, menyelesaikan masalah dengan fungsi dan persamaan. Sedangkan konjektur merupakan berpikir matematika tentang kombinasi simbol-grafik, holistik dan sistematis. Pada jenis berpikir logis terdiri dari deduksi, kategorisasi, khusus, analogi, generalisasi, dan inversi. Sedangkan jenis berpikir manipulatif terdiri dari konstruksi, substitusi, metode koefisien tak tentu, metode melengkap kuadrat sempurna, parameter dan diskriminan. Dalam menyelesaikan masalah matematika selalu melibatkan tiga kemampuan yaitu logis, strategis dan manipulatif sebagai bentuk berpikir nalar.

Penalaran sebagai kegiatan, proses atau aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat pernyataan baru berdasar pada beberapa pernyataan yang diketahui benar (Shadiq, 2013). Penalaran merupakan suatu proses berpikir yang menghubungkan fakta-fakta atau data yang sistematis menuju suatu kesimpulan (Kurnia et al., 2019). Metode penalaran sangat berpengaruh terhadap kemampuan berpikir kritis (Alfin et al., 2019). Kemampuan penalaran matematika diperlukan dalam menyelesaikan masalah matematika. Penalaran ini membantu seseorang untuk mengkaji masalah dengan cara yang logis dan yakin bahwa matematika dapat dipahami, dipikirkan, dibuktikan dan dievaluasi (Siti Nurjanah, Gida Kadarisma, 2019). Menurut NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics, 2000) standar penalaran dan pembuktian yaitu mengenali penalaran dan pembuktian sebagai aspek fundamental matematika, membuat dan menyelidiki dugaan matematis, mengembangkan dan mengevaluasi argumen matematika dan bukti, serta dapat memilih dan menggunakan berbagai jenis penalaran dan metode bukti.

Demikian pula dalam penyelesaian masalah persamaan diferensial membutuhkan penalaran matematis. Penalaran matematika membantu mahasiswa menemukan metode penyelesaian persamaan diferensial yang tepat. Pada persamaan diferensial mahasiswa akan dihadapkan permasalahan yang kompleks, dimulai dengan memahami masalah, merencanakan penyelesaian, melakukan manipulasi, sampai dengan generalisasi. Sejalan dengan Lithner (Konita et al., 2019; Napitupulu, 2017) cara menyusun penalaran adalah memberikan masalah, memilih strategi yang dapat memecahkan masalah, implementasi strategi, dan kesimpulan. Indikator kemampuan penalaran berdasarkan Peraturan DIRTjen

Diknas No. 506/C/PP/2004 diantaranya adalah (1) mengajukan dugaan, (2) melakukan manipulasi, (3) menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap solusi, (4) menarik kesimpulan dari pernyataan, (5) memeriksa kesahihan argumen, dan (6) menemukan pola atau sifat untuk membuat generalisasi (Pandu & Suwarsono, 2021).

Kesalahan dapat diartikan adanya penyimpangan atau kekeliruan. Kesalahan dalam penalaran matematis dapat dikategorikan dengan mengelompokkan kesalahan pada masalah divergensi tipe membuktikan menjadi kesalahan fakta, kesalahan konsep, kesalahan prinsip, dan kesalahan operasi (Widodo, 2016). Sedangkan pada mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa kesalahan mahasiswa disebabkan kurangnya memahami konsep-konsep pada mata kuliah prasyarat seperti Kalkulus I, Kalkulus II, dan Kalkulus Lanjut, dan mengungkap fakta-fakta yang harus ditemukan untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial sebagai penalaran matematis (V. Ramdhani, 2021). Kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan persamaan diferensial terdiri dari kesalahan konsep, prosedural dan faktual (Sulistiyorini, 2017).

Penelitian tentang kemampuan penalaran sudah banyak diteliti di berbagai negara dan tidak hanya siswa saja yang mengalami kesulitan bekerja pada domain ini (Napitupulu 2017, pt. Stylianides; Suryanti et al., 2020), melainkan juga banyak dialami mahasiswa (Adamura & Susanti, 2018; Septian, 2014; Somatanaya, 2017), seperti melaksanakan penalaran matematis yang kurang sempurna.

Hasil penelitian terhadap kemampuan penalaran mahasiswa pada mata kuliah Persamaan Diferensial yang didasarkan pada gender dapat ditinjau melalui indikator menyajikan pernyataan matematika secara tertulis, melakukan manipulasi matematika, menyusun bukti terhadap kebenaran solusi, dan menarik kesimpulan dari pernyataan (Basir et al., n.d.).

Penelitian lainnya (Ningsih & Rohana, 2018) yang membahas tentang Persamaan Diferensial Biasa juga menunjukkan bahwa proses pembelajaran persamaan diferensial dianggap sulit yang disebabkan banyak prosedur dari turunan dan pengintegralan, Hasil analisis dengan teori APOS memperlihatkan Sebagian besar mahasiswa hanya mampu memahami konsep Persamaan Diferensial Biasa pada tahap aksi. Kesalahan terbanyak terletak pada penggunaan prinsip turunan dan pengintegralan dari fungsi eksponen dan logaritma.

Cara menyusun penalaran yang peneliti modifikasi dari Lithner menjadi dasar dari penelitian penalaran pada mata kuliah persamaan diferensial. Fokus penelitian ini adalah kesalahan penalaran matematis mahasiswa pada mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa pada materi solusi persamaan diferensial, dan persamaan diferensial orde satu, yang diamati melalui empat aspek yaitu memahami masalah, merencanakan penyelesaian, manipulasi matematis (berpikir manipulasi pada prosedur penyelesaian matematika), dan membuat kesimpulan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek penelitian sebanyak 5 mahasiswa program studi Pendidikan Matematika Kampus Blitar, Universitas PGRI Adi Buana. Keseluruhan subjek merupakan mahasiswa semester 6 tahun akademik 2020/2021

yang mengambil mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa. Instrumen yang digunakan dalam penelitian adalah soal tes dan pedoman wawancara. Tes terdiri dari 3 butir soal uraian yang meliputi materi solusi persamaan diferensial, persamaan linier orde satu, dan persamaan diferensial eksak dapat dilihat pada tabel 2. Untuk nomor 1, merupakan soal pembuktian suatu fungsi y yang diketahui merupakan solusi dari persamaan diferensial yang dimaksud. Untuk soal nomor 2 berkaitan dengan mencari solusi khusus persamaan diferensial linier orde satu pada nilai awal yang diketahui. Sedangkan nomor 3, merupakan soal tentang membuktikan suatu persamaan diferensial eksak, dan mencari solusi dari persamaan eksak tersebut. Pedoman wawancara digunakan untuk memperkuat aspek yang diamati meliputi aspek memahami masalah, merencanakan, manipulasi matematis, dan kesimpulan. Untuk dapat mengetahui jenis kesalahan dalam menyelesaikan persamaan diferensial rubrik kesalahan dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Kriteria Penilaian Kesalahan Penalaran Matematis

No	Kriteria Penalaran Matematis	Kode Kesalahan
1	Menuliskan soal kembali	
	a. Menuliskan soal dengan bahasa sendiri atau sesuai lembar tes	0
	b. Menuliskan soal kembali tidak sesuai dengan tes	v
	c. Tidak menuliskan soal	x
2	Merencanakan penyelesaian	
	a. Langkah-langkah yang dilakukan pada setiap penyelesaian sesuai dengan metode persamaan diferensial	0
	b. Langkah-langkah penyelesaian tidak urut atau tidak sesuai dengan metode persamaan diferensial	v
	c. Tidak ada langkah-langkah penyelesaian	x
3	Manipulasi Matematis	
	a. Melakukan serangkaian prosedur matematis yang kompleks seperti melibatkan turunan atau integral atau aljabar atau operasi matematis	0
	b. Melakukan sebagian prosedur matematis dengan benar, tidak ada hubungan	v
	c. Tidak melakukan manipulasi matematis	x
4	Membuat kesimpulan	
	a. Kesimpulan menjawab pertanyaan soal dengan benar dan tepat	0
	b. Kesimpulan tidak menjawab pertanyaan soal dengan benar dan tepat	v
	c. Tidak membuat kesimpulan	x

Tabel 2. Indikator Penalaran dan Masalah Persamaan Diferensial

Indikator	Masalah
Dugaan dan Bukti	1. Apakah $y(t) = e^{-2t} + \frac{t}{3}$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $y'''' + 4y''' - 8y' = \frac{1}{3}$ Buktikanlah!
Penggunaan pola hubungan untuk menganalisis situasi, membuat analogi atau mengeneralisasi	2. Tentukan solusi dari persamaan diferensial linear $ty' + 2y = \sin t$ pada masalah nilai awal $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Menarik kesimpulan logis dan memberikan penjelasan tentang model, fakta, sifat, hubungan, atau pola yang ada	3. Diketahui suatu persamaan differensial $(-2y \sin x + e^x \sin y)dx + (2 \cos x + e^x \cos y)dy = 0$ a. Buktikan bahwa persamaan tersebut eksak. b. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut untuk $y(0) = \pi$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sumber belajar yang digunakan mahasiswa dalam kegiatan perkuliahan yaitu Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems karya Boyce Di Prima. Hasil penelitian dari kelima subjek penelitian terhadap masalah persamaan diferensial dapat diperhatikan pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Kesalahan Penalaran pada Persamaan Diferensial Biasa

Subjek	Jenis Kesalahan											
	Masalah 1			Masalah 2			Masalah 3					
Penelitian (Sn)	Mencanakan	Manipulasi	Membutuhkan	Mencanakan	Manipulasi	Membutuhkan	Mencanakan	Manipulasi	Membutuhkan	Mencanakan	Manipulasi	Membutuhkan
S1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pada masalah nomor satu yaitu pembuktian fungsi y merupakan solusi dari persamaan diferensial. Pembuktian yang diharapkan yaitu dari fungsi y(t) yang diketahui mahasiswa dapat menurunkan sampai turunan keempat, kemudian mensubstitusinya kepersamaan dan dengan menyederhanakan hasilnya memperoleh bukti yang sesuai. Pada soal nomor satu, dari empat kategori proses penalaran, kesalahan terjadi pada merencanakan penyelesaian yaitu subjek S4 dan S5. Keduanya menuliskan soal dan fungsi y(t) dilanjutkan dengan substitusi fungsi y dan turunannya kepersamaan diferensial, namun melewatkan langkah menurunkan fungsi y(t) sampai turunan yang keempat. Pada manipulasi matematis ketiga subjek melakukan kesalahan yang berbeda. Pada subjek S3 salah dalam menurunkan fungsi y(t), sehingga hasil fungsi y(t) yang disubstitusikan juga

tidak tepat. Sedangkan subjek S4 dan S5 mensubstitusikan langsung dengan fungsi $y(t)$ sehingga hasilnya kurang tepat (hasil pekerjaan S5 disajikan pada gambar 1). Akibatnya, kesimpulan yang diperoleh dari S4 dan S5 juga salah.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & y'' + 4y' - 8y = \frac{1}{3} \quad y(t) = e^{-2t} + \frac{t}{3} \\
 & y'' + 4y' - 8y = \frac{1}{3} \\
 & (e^{-2t} + \frac{t}{3})'' + 4(e^{-2t} + \frac{t}{3})' - 8(e^{-2t} + \frac{t}{3}) = \frac{1}{3} \\
 & -\frac{1}{2}e^{-2t} + 1(-e^{-2t}) - 8(-\frac{1}{2}e^{-2t}) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
 & 0 - 4e^{-2t} + 4e^{-2t} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Gambar 1 Jawaban masalah no 1 dari S5

Berikut kutipan wawancara peneliti dengan S5.

P : “Apa yang mbak Anda ketahui dari soal nomor 1?”

S5 : “Disini, apakah $y(t) = e^{-2t} + \frac{t}{3}$, merupakan solusi dari persamaan diferensial $y(t) = y'''' + 4y''' - 8y' = \frac{1}{3}$ ”

P : “Dengan cara apa, Anda membuktikan soal nomor satu?”

S5 : “Saya membuktikannya dengan menurunkan dari turunan pertama, kedua, ketiga dan keempat.”

P : “Terus. Bagaimana hasil turunannya?”

S5 : “Terus disini $e^{-2t} + \frac{t}{3}$ hasil turunan keempatnya $-\frac{1}{2}e^{-2t}$. Turunan ketiganya $-e^{-2t}$. Terus turunan pertamanya $-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}$. Selanjutnya disederhanakan diperoleh hasilnya

$$0 - 4e^{-2t} + 4e^{-2t} + \frac{1}{3}, \text{ diperoleh hasilnya sama dengan } \frac{1}{3} \text{ ”}$$

P : “Hasilnya berarti sama dengan ruas kanan?”

S5 : “iya bu”

P : “Berapa turunan pertama dari e^{-2t} ?”

S5 : “ $-\frac{1}{2}e^{-2t}$ ”

Pada masalah persamaan diferensial linier yaitu soal nomor dua dengan indikator penalaran yang menuntut pola hubungan dan generalisasi seluruh subjek melakukan kesalahan dalam proses penalaran, seperti yang terlihat pada tabel 3. Pada kegiatan awal menuliskan kembali soal tidak ada subjek yang melakukan kesalahan. Pada tahap merencanakan penyelesaian masalah hanya dua subjek yang jelas dalam tahapan penyelesaian yaitu setelah menuliskan persamaan diferensial dilanjutkan dengan mencari

faktor integrasi, kemudian mencari solusi persamaan diferensial linier dengan memanfaatkan faktor integrasi, dan dilanjutkan dengan mencari solusi khusus persamaan diferensial.

$$\textcircled{2} ty' + 2y = \sin t \Rightarrow y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}$$

$$\text{Faktor integral} = \mu(t) = \exp \int \left(\frac{2}{t}\right) dt = 2 \ln |1/2 t| = 2e^{1/2 t}$$

$$\mu(t)y' + \mu(t)\frac{2}{t}y = \mu(t)\frac{\sin t}{t}$$

$$2e^{1/2 t}y' + 2e^{1/2 t}\frac{2}{t}y = 2e^{1/2 t}\frac{\sin t}{t}$$

$$[2e^{1/2 t}y] = 2e^{1/2 t}\frac{\sin t}{t}$$

$$\int d[2e^{1/2 t}y] = \int 2e^{1/2 t}\frac{\sin t}{t} dt$$

$$2e^{1/2 t}y = t e^{1/2 t} \cos t + C$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t \cos t + C$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$1 = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} + C$$

$$C = -1/4$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t \cos t - 1/4$$

Gambar 2 Jawaban masalah no 2 dari S2

Pada proses manipulasi matematis, kesalahan dari kelima subjek beragam, S1 salah pada memanipulasi bentuk aljabar agar diperoleh bentuk turunan dari fungsi perkalian t^2y . Namun, pada ruas kiri persamaan yaitu $\frac{\sin t}{t} \cdot t^2$ hasil dari penyederhanaan salah diperoleh $\sin t$, yang seharusnya $t \sin t$. Sedangkan S2 melakukan kesalahan pada faktor integrasi, hasil pengintegralan dari $\exp \int \frac{2}{t} dt$ yang diperoleh belum tepat, seperti yang terlihat pada gambar 2. Tiga subjek lainnya yaitu S3, S4, dan S5 pada proses manipulasi tidak menggunakan metode persamaan diferensial linier. Kesalahan disebabkan karena lupa cara penyelesaian dan belum memahami persamaan diferensial linier. Berikut kutipan wawancara antara peneliti dan subjek S2.

- P : Sekarang, ceritakan apa yang Anda ketahui dari soal nomor 1
- S2 : Tentukan solusi dari persamaan diferensial linear $ty' + 2y = \sin t$ pada masalah nilai awal yaitu $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- P : Bagaimana rencana mencari solusi dari persamaan diferensial?
- S2 : Nah disini diketahui bahwa persamaan diferensialnya adalah $ty' + 2y = \sin t$. Kemudian ini kita hilangkan t nya terlebih dahulu, untuk menghilangkan t pada y' .
- P : Mengapa t pada y' perlu dihilangkan?
- S2 : Persamaan harus dibuat ke bentuk linear
- P : "Selanjutnya"
- S2 : Kemudian untuk menghilangkan t nya berarti dirubah menjadi $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}$. Kemudian dari situ, kita mencari faktor integrasi $\mu(t)$ dengan $= \exp \int \frac{2}{t} dt$ itu sama dengan $2 \ln |1/2 t|$ sama dengan $2e^{1/2 t}$
- P : Setelah mendapat faktor integral, apa yang dilakukan?

- S2 : Kemudian kita masukkan faktor integralnya, persamaan tadi yang sudah dihilangkan t nya tadi, kita kalikan dengan faktor integral $\mu(t)y' + \mu(t)\frac{2}{t}y = \mu(t) \sin t$. Kemudian dimasukkan faktor integralnya tadi jadi $2e^{\frac{1}{2}t}y' + 2e^{\frac{1}{2}t}\frac{2}{t}y = 2e^{\frac{1}{2}t} \sin t$. Dari bentuk ini sudah dapat disederhanakan menjadi $2e^{\frac{1}{2}t}y = 2e^{\frac{1}{2}t} \sin t$
- P : Mengapa $2e^{\frac{1}{2}t}y' + 2e^{\frac{1}{2}t}\frac{2}{t}y$ menjadi $2e^{\frac{1}{2}t}y$?
- S2 : Ini...? "(S2 masih ragu-ragu)
- P : Apakah integral dan turunannya? Mungkin bisa dicocokkan dengan catatannya dulu.
- S2 : $2e^{\frac{1}{2}t}y' + 2e^{\frac{1}{2}t}\frac{2}{t}y$ merupakan hasil turunan dari $2e^{\frac{1}{2}t}y$
- P : "Selanjutnya..."
- S2 : Kemudian kedua ruas dari persamaan $2e^{\frac{1}{2}t}y = 2e^{\frac{1}{2}t} \sin t$ diintegrasikan
- P : Apakah kamu tahu alasannya, kenapa $2e^{\frac{1}{2}t}y' + 2e^{\frac{1}{2}t}\frac{2}{t}y$ menjadi $2e^{\frac{1}{2}t}y$?
- S2 : S2 terdiam sambil berpikir cukup lama. Lupa, bu

5. Diketahui Suatu persamaan diferensial

$$(-2y \sin x + e^x \sin y) dx + (2 \cos x + e^x \cos y) dy = 0$$

a. buktikan bahwa persamaan tersebut eksak

$$(-2y \sin x + e^x \sin y) dx + (2 \cos x + e^x \cos y) dy = 0$$

$$\int (-2y \sin x + e^x \sin y) dx + \int (2 \cos x + e^x \cos y) dy = 0$$

$$\underbrace{(-2y \sin x + e^x \sin y)}_{M_y} + \underbrace{(2 \cos x + e^x \cos y)}_{N_x} dy = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial N_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (-2y \sin x + e^x \sin y) = \frac{\partial}{\partial x} (2 \cos x + e^x \cos y)$$

$$-2 \sin x + e^x \cos y = -2 \sin x + e^x \cos y$$

karena $M_y = N_x$ maka persamaan diferensial eksak

b. $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int (-2 \sin x + e^x \cos y) dx + h(y)$

$$\psi = -2 \cos x + e^x \cos y + h(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-2 \cos x + e^x \cos y) + h'(y)$$

$$-2 \cos x + e^x \cos y + h(y) = -e^x \sin y + h'(y)$$

$$-2 \cos x + e^x \cos y + h(y) + e^x \sin y - h'(y) = 0$$

$$-2 \cos x + e^x \cos y + e^x \sin y + h(y) - h'(y) = 0$$

Gambar 3. Jawaban S1 pada masalah nomor 1

Pada masalah penalaran nomor 3 yang berkaitan dengan menarik kesimpulan logis dan menjelaskan hubungan dari sifat dan pola yang ada, kesalahan proses penalaran banyak dilakukan pada pertanyaan b, yaitu mencari solusi persamaan diferensial eksak. S1 mampu membuktikan persamaan diferensial sebagai persamaan eksak dan mampu mencari solusi dari persamaan diferensial eksak. Pada soal nomor 3, S1 (gambar 3) terlebih dahulu menuliskan kembali persamaan dan untuk menjawab pertanyaan a), subjek mengelompokkannya dengan fungsi M dan N. Pada tahap berikutnya S1 menurunkan fungsi M terhadap y dan fungsi N terhadap x. Kemudian S1 mengecek kebenaran dengan menunjukkan bahwa $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. S1 membuat kesimpulan bahwa persamaan pada soal nomor 3 merupakan persamaan diferensial eksak. Untuk pertanyaan 3b), S1 merencanakannya dengan melakukan klaim bahwa $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$, dan klaim $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$. Selanjutnya S1 melanjutkan

proses manipulasi untuk mencari fungsi . Langkah selanjutnya, S1 menarik kesimpulan pada masalah nilai titik awal. Namun, kesimpulan yang diberikan tidak menjelaskan solusi khusus dari fungsi ψ . S1 melakukan kesalahan karena tidak menuliskan kesimpulan solusi khusus dari persamaan diferensial eksak pada masalah nilai awal. Berikut kutipan wawancara peneliti dengan S1.

P : Apakah yang ditanyakan dari soal nomor 3?

S1 : Diketahui suatu persamaan diferensial $(-2y \sin x + e^x \sin y)dx + (2 \cos x + e^x \cos y)dy = 0$, yang pertama buktikan bahwa persamaan diferensial tersebut eksak. Dan yang kedua tentukan solusi dari persamaan diefernsial untuk $y(0) = \pi$

P : Jelaskan rencana penyelesaian dari persamaan tersebut?

S1 : Disini kan ada dua variabel dy dan dx . Kalau didepannya dx itu M dan yang didepannya y itu N. Selanjutnya M itu diturunkan terhadap y dan N diturunkan terhadap x .

P : Bagaimanakah caranya membuktikan bahwa persamaan diferensial tersebut eksak?

S1 : M diturunkan terhadap y . Jadinya, $\frac{\partial M}{\partial y}$ yang diturunkan hanya yang terhadap y saja jadinya $-2 \sin x + e^x \cos y$. Selanjutnya, N diturunkan terhadap x saja. $\frac{\partial N}{\partial x}$ yaitu $-2 \sin x + e^x \cos y$. Karena $\frac{\partial M}{\partial y}$ dan $\frac{\partial N}{\partial x}$ itu sama, jadi persamaannya eksak.

P : Sekarang pertanyaan b. Bagaimana caranya untuk menyelesaikan persamaan tersebut?

S1 : Itukan ada $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$. Nanti ada $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$. Saya menghafalnya kalau $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ berarti $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$. Dikerjakan dulu $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$, dengan $M = -2y \sin x + e^x \sin y$. Karena yang dicari ψ ini kayak nomor satu tadi saya integralkan.

P : Mengapa penulisan integral dari $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2y \sin x + e^x \sin y$ menjadi $\partial \int \psi = \dots$?

S1 : iya... ya bu itu salah

Jadi diintegalkan supaya ∂x nya di ruas kanan. Selanjutnya, pada ruas kiri karena integral tinggal fungsi ψ . Pada ruas kanan diintegalkan terhadap x , jadi dilihat x nya. $\sin x$ diturunkan jadi $\cos x$, terus eksponen x juga diturunkan hasilnya sama eksponen x . Terus $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$, karena N sudah diketahui makan N dimasukkan. Setelah diutek-utek sampai ketemu $h(x)$

P : Selanjutnya?

S1 : Dari beberapa buku yang saya baca, $\psi(x, y) = 2y \cos x + e^x \sin y + y$ dari ψ dan $h(x)$ nya dimasukkan

P : Jelaskan bagaimana anda mendapatkan solusi pada nilai yang sudah ditentukan?

S1 : Ini sebenarnya ada yang salah. Harusnya $\cos 0$ itu setengah π , disini hanya π saja. π kuadrat, disini ditulis 2π

Empat subjek lainnya melakukan kesalahan manipulasi penyelesaian yang berbeda-beda. S2, melakukan kesalahan konsep karena menyelesaikan solusi persamaan diferensial eksak dengan persamaan diferensial linier. Kesalahan yang sama juga dilakukan S5. Sedangkan S3 melakukan kesalahan prosedur memasukkan fungsi , yang seharusnya fungsi . Sedangkan S4 lupa cara penyelesaian persamaan diferensial eksak.

Pemberian masalah membantu mahasiswa mengembangkan keterampilan pemecahan masalah, kemampuan untuk mandiri melalui penyelidikan dan analisa. Dalam taksonomi Bloom kemampuan kognitif pada tingkat analisis adalah memisahkan ide-ide menjadi bagian-bagian komponen untuk memahami struktur ide-ide tersebut, seperti mencari kesesatan logika dalam penalaran (Eggen & Kauchack, 2012). Masalah merupakan kunci penting dalam berpikir nalar. Kemampuan mahasiswa dalam memahami masalah salah satunya dapat dilihat dengan menuliskan kembali soal atau masalah tersebut. Pada tahap awal penalaran yaitu mahasiswa menuliskan soal kembali, merupakan kesalahan yang paling sedikit dilakukan oleh kelima subjek dari tiga soal tersebut. Kesalahan pada tahap ini dikarenakan mahasiswa salah dalam memahami kesimpulan dari persamaan diferensial eksak untuk menjawab solusi. Kesalahan mengintegrasikan informasi dapat menyebabkan terputusnya koneksi antar domain matematika yang berdampak tidak terselesaikannya masalah. Padahal kemampuan koneksi ini menurut Shafer dan Foster (Farida Kurniawati et al., 2021) merupakan salah satu indikator berpikir matematis.

Kegiatan merencanakan penyelesaian masalah merupakan aktivitas yang mempertanyakan bagaimana menyelesaikan masalah dan menarik hubungan yang diketahui dari masalah. Dalam merancang perencanaan, find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a plan of the solution (Polya, 1978) yakni kegiatan perencanaan diantaranya menemukan hubungan antara data dan yang belum diketahui. Anda mungkin diwajibkan untuk mempertimbangkan masalah tambahan jika koneksi langsung tidak dapat ditemukan. Anda akhirnya harus mendapatkan rencana solusi. Pada tahap merencanakan penyelesaian masalah, kesalahan dikarenakan mahasiswa belum memahami materi, bahkan lupa metode penyelesaian,

Dari ketiga masalah persamaan diferensial, kesalahan penalaran matematis pada proses manipulasi matematis lebih banyak pada kurangnya penguasaan dan keterampilan untuk menghubungkan turunan dan integral fungsi. Tahap manipulasi menuntut mahasiswa untuk menerapkan pola yang telah mereka temukan dalam berbagai persoalan merupakan tahapan yang kompleks Pada tahap ini sebagaimana hasil penelitian (S. Ramdhani, 2018) menunjukkan bahwa tidak ada satupun mahasiswa yang menyelesaikan dengan menggunakan kemampuan generalisasi mereka. Hal serupa juga terjadi pada penelitian (Adamura & Susanti, 2018) yang menunjukkan mahasiswa berpikir intuitif sedang tidak mampu melaksanakan penalaran matematis pada tahap pemecahan masalah menyelesaikan masalah sesuai rencana dan melakukan pengecekan kembali. Kesulitan mahasiswa dalam mempelajari persamaan diferensial perlu penekanan pada materi kalkulus diantaranya derivative computations topic needed to include partial derivative computations, explaining the relationships between derivative and integral (Jennifer A. Czocher, Jenna Tague, 2014). Kemampuan prasyarat berpengaruh signifikan terhadap kemampuan penalaran matematis mahasiswa (Septian, 2014). Kalkulus sebagai materi prasyarat mutlak dikuasai mahasiswa dalam mempelajari persamaan diferensial.

Dalam penalaran matematis, fakta-fakta atau konjektur mengungkapkan kebenaran dari penyelesaian masalah dengan hasil akhirnya berupa kesimpulan. Perencanaan penyelesaian masalah dan proses manipulasi matematis yang tepat menentukan kebenaran dari kesimpulan. Dari tiga masalah persamaan diferensial

ketidakmampuan membuat kesimpulan yang tepat dan benar, bahkan tidak membuat kesimpulan, dikarenakan tidak tuntasnya perencanaan penyelesaian dan manipulasi matematis yang dikerjakan mahasiswa. Kesalahan pada tahap kesimpulan dikarenakan mahasiswa tidak menyelesaikan proses manipulasi matematis dengan benar, ada juga yang lupa metode penyelesaian. Kemampuan mengerti konsep, istilah matematika, dan memilih prosedur yang benar penting ditumbuhkan dalam upaya menyelesaikan masalah matematika (Budhi, 2006).

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan dari penelitian analisis kesalahan penalaran matematis pada materi persamaan diferensial diperoleh bahwa kesalahan banyak dilakukan subjek pada indikator penalaran penggunaan pola hubungan dan generalisasi, juga pada indikator menjelaskan hubungan fakta, sifat dan pola hubungan yang ada. Kesalahan pada proses penalaran banyak dilakukan subjek pada merencanakan penyelesaian, manipulasi matematis, dan membuat kesimpulan. Sedangkan penyebab kesalahan beragam seperti belum memahami konsep persamaan diferensial, belum terampil dalam membuat hubungan konsep integral dan turunan fungsi, kurang teliti dalam menyederhanakan bentuk aljabar, dan lupa metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial.

Saran, pada kegiatan pembelajaran materi persamaan diferensial perlu dilakukan perbaikan dalam menyampaikan konsep persamaan diferensial, perlu ada penekanan pada konsep turunan dan integral. Mahasiswa kurang semangat dalam menyelesaikan masalah yang kompleks, perlu adanya penelitian lanjutan tentang daya juang mahasiswa dalam menyelesaikan masalah penalaran menggunakan fakta, sifat dan pola hubungan.

DAFTAR PUSTAKA

- Adamura, F., & Susanti, V. D. (2018). Penalaran Matematis Mahasiswa dengan Kemampuan Berpikir Intuitif Sedang dalam Memecahkan Masalah Analisis Real. *Jurnal Edukasi Matematika Dan Sains*, 6(2), 77. <https://doi.org/10.25273/jems.v6i2.5366>
- Alfin, M. B., Hidayati, Y., Hadi, W. P., & Irsad, R. (2019). Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa Terhadap Pembelajaran Hypothetico-Deductive Reasoning Dalam Learning Cycle 7E. *Jppipa*, 4(2), 75–81. <http://journal.unesa.ac.id/index.php/jppipa>
- Basir, F., Ekawati, S., Studi, P., Matematika, P., Palopo, U. C., Diferensial, P., & Pendahuluan, A. (n.d.). *Berdasarkan Gender Pada Mata Kuliah*. 5, 78–84.
- Budhi, W. S. (2006). *Langkah Awal Menuju Ke Olimpiade Matematika*. CV Ricardo.
- Desmita. (2012). *Psikologi Perkembangan Peserta Didik*. PT. Remaja Rosdakarya.
- Eggen, P., & Kauchack, D. (2012). *Srategi dan Model Pembelajaran* (6th ed.). PT Indeks.
- Farida Kurniawati, Sapti, M., & Yuzianah, D. (2021). Deskripsi Level Kemampuan Berpikir Matematis Berdasarkan Shafer dan Foster dalam Penyelesaian Masalah Materi Pecahan. *Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika (JIPM)*, 3(2), 73–82. <https://doi.org/10.37729/jipm.v3i2.1646>
- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). Introductory Chapter: Problem Solving Approach to Develop Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking*, 1(2012), 1–28. https://doi.org/10.1142/9789814350853_0001
- Jennifer A. Czocher, Jenna Tague, and G. B. (2014). Coherence from Calculus to Differential Equations. *Paper Knowledge . Toward a Media History of Documents*. http://pzacad.pitzer.edu/~dbachman/RUME_XVI_Linked_Schedule/rume16_submission_94.pdf
- Konita, M., Asikin, M., & Noor Asih, T. S. (2019). Kemampuan Penalaran Matematis dalam Model Pembelajaran Connecting, Organizing, Reflecting, Extending (CORE). *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 2, 611–615.
- Kurnia, E., Suryanti, & Nisa, S. K. (2019). Profil Penalaran Siswa MTs Al Muslihuun Pada Materi Peluang Berorientasi Pendekatan Metaphorical Thinking Ditinjau dari Kemampuan Matematis. *Cakrawala Pendidikan*, 23(April), 154–162.
- Li, N., Mok, I. A. C., & Cao, Y. (2019). The evolution of mathematical thinking in Chinese mathematics education. *Mathematics*, 7(3), 1–18. <https://doi.org/10.3390/math7030297>
- Napitupulu, E. E. (2017). Analyzing the Teaching and Learning of Mathematical Reasoning Skills in Secondary School. *Asian Social Science*, 13(12), 167. <https://doi.org/10.5539/ass.v13n12p167>
- Ningsih, Y. L., & Rohana, R. (2018). Pemahaman Mahasiswa Terhadap Persamaan Diferensial Biasa Berdasarkan Teori Apos. *Jurnal Penelitian Dan Pembelajaran Matematika*, 11(1). <https://doi.org/10.30870/jppm.v11i1.2995>
- Pandu, Y. K., & Suwarsono, S. (2021). Analisis Kemampuan Penalaran Matematika Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Materi Limit Fungsi. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 4, 436–445. <https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/article/view/44991>

- Permana, Y., & Sumarmo, U. (2007). Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah. *Educationist*, 1(2), 116–123.
- Polya, G. (1978). How to solve it: a new aspect of mathematical method second edition. In *The Mathematical Gazette* (Vol. 30, p. 181). <http://www.jstor.org/stable/3609122?origin=crossref>
- Ramdhani, S. (2018). Kemampuan Generalisasi Mahasiswa Pada Perkuliahan Kapita Selekta Matematika Sma. *Jurnal Analisa*, 4(2), 83–89. <https://doi.org/10.15575/ja.v4i2.3926>
- Ramdhani, V. (2021). Penggunaan Software Maple pada Pembelajaran Persamaan Diferensial Biasa. *GAUSS: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4(1), 70–80. <https://doi.org/10.30656/gauss.v4i1.2985>
- Septian, A. (2014). Pengaruh Kemampuan Prasyarat terhadap Kemampuan Penalaran Matematis Mahasiswa dalam Matakuliah Analisis Real. *ATIKAN: Jurnal Kajian Pendidikan*, 4(2), 179–188. <http://journals.mindamas.com/index.php/atikan/article/view/16/15>
- Shadiq, F. (2013). Penalaran dengan Analogi? Pengertiannya dan Mengapa Penting? *Artikel Pendidikan PPPPTK Matematika*, 1–7. <http://p4tkmatematika.kemdikbud.go.id/artikel/2013/12/02/penalaran-dengan-analogi-pengertiannya-dan-mengapa-penting/>
- Siti Nurjanah, Gida Kadarisma, W. S. (2019). ANALISIS KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIK DALAM MATERI SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL PADA SISWA SMP KELAS VIII DITINJAU DARI PERBEDAAN GENDER. *Journal On Education*, 01(02), 372–381. <https://doi.org/https://doi.org/10.31004/joe.v1i2.77>
- Somatanaya, A. A. G. (2017). ANALISIS KEMAMPUAN BERFIKIR NALAR MATEMATIS SERTA KONTRIBUSINYA TERHADAP PRESTASI BELAJAR MAHASISWA (Studi Terhadap Mahasiswa FKIP Pendidikan Matematika Universitas Siliwangi). *TEOREMA: Teori Dan Riset Matematika*, 1(2), 55. <https://doi.org/10.25157/teorema.v1i2.547>
- Sulistiyorini, Y. (2017). Analisis Kesalahan Dan Scaffolding Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial. *KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1), 91. <https://doi.org/10.22236/kalamatika.vol2no1.2017pp91-104>
- Suryanti, Sari, C. Y., & Kristiani. (2020). Kesalahan Penyelesaian Soal Statistika Tipe High Order Thinking Skills Berdasarkan Teori Newman. *Jurnal Tadris Matematika*, 3(2), 207–218. <https://doi.org/10.21274/jtm.2020.3.2.207-218>
- Sutarto, & Hastuti, I. D. (2010). *Conjecturing Dalam Pemecahan Masalah*. 1(2), 172–178.
- Tan, O. S. (2004). *Enhancing Thinking through Problem -based Learning Approaches: International Perspectives*. Thomson.
- The National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles Standards and for School Mathematics*.
- Widodo, S. A. (2016). Kesalahan Dalam Pemecahan Masalah Divergensi Pada Mahasiswa Matematika. *AdMathEdu: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Ilmu Matematika Dan Matematika Terapan*, 4(1). <https://doi.org/10.12928/admathedu.v4i1.4810>