

Model Epidemsi Sirs Dengan Time Delay

Ferdinand Sinuhaji¹

Abstrak

Epidemi merupakan suatu keadaan berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan yang normal dalam periode yang singkat. Penulisan ini membahas menurunkan model epidemi SIRS dengan time delay melalui model matematika berdasarkan model epidemi SIRS (*Susceptible, Infective, Recovered, Susceptible*). Model epidemi mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu adalah titik kesetimbangan bebas infeksi penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Syarat dan kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan (R_0), yaitu nilai yang menentukan ada atau tidaknya penyebaran infeksi penyakit pada suatu populasi. Hasil penelitian diketahui bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 0$ ketika jumlah bilangan $R_0 < 1$. Dapat dikatakan, time delay tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain, pengaruh time delay dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun, ketika, $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay.

Kata Kunci : *Sirs, Model epidemi, Time delay*

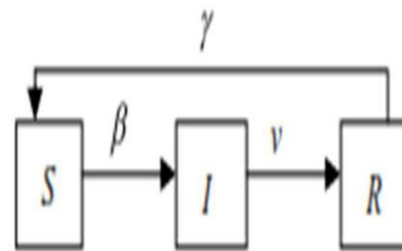
¹ Ferdinand Sinuhaji, Mahasiswa S2 Matematika, FMIPA, Universitas Sumatera Utara, Email: ferdinand_sinuhaji@yahoo.co.id

Pendahuluan

Dalam kehidupan makhluk hidup ini banyak permasalahan yang muncul diantaranya banyak penyakit menular yang mengancam kehidupan. Sangat diperlukan sistem untuk mengontrol dan mengetahui penyebaran penyakit menular tersebut salah satunya adalah model matematika yang dapat membantu dan mempermudah penyelesaian masalah tersebut. Menyelesaikan masalah juga tidak mudah untuk menurunkan model matematisnya terutama untuk masalah yang cukup kompleks. Meskipun model matematisnya sudah diperoleh namun masalah waktu dan biaya biasanya juga menjadi kendala apabila menggunakan model matematis tersebut.

Model epidemi merupakan sistem persamaan diferensial dirumuskan sebagai *masalah nilai awal atau Initial Value Problems (IVPs)*. Sehingga model diintegrasikan terhadap waktu, yang dimulai dengan awal yang ditetapkan untuk kelas-kelas populasi yang berbeda. Epidemi merupakan suatu keadaan berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan yang normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *endemik*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas maka disebut *pandemik*. Model epidemik pertama kali menjelaskan masalah penyebaran penyakit adalah model SIR klasik yang dikemukakan oleh (Kermack dan McKendrick, 1927).

Model ini terdiri atas tiga kompartemen yaitu S (*susceptible*), I (*infected*), R (*recovered*). Sejak (Kermack dan McKendrick, 1927) mengusulkan SIR klasik, pemodelan matematika telah menjadi alat penting dalam menganalisis penyebaran dan pengendalian infeksi penyakit. Upaya telah dilakukan untuk mengembangkan realistik model matematika untuk transmisi infeksi penyakit. Secara grafik dapat ditunjukkan model teori epidemik (Anderson dan May, 1991), sebagai latar belakang dari penelitian ini. Model teori epidemi untuk penyakit diilustrasikan pada gambar dibawah ini



Gambar 1. Model epidemi sirs

Model SIRS menggambarkan bahwa individu yang terinfeksi penyakit (*Infected*), kemudian sembuh (*Recovered*), setelah sembuh, individu memperoleh kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Seiring berjalan waktu kekebalan tersebut menghilang atau berkurang, mengakibatkan individu yang rentan terserang penyakit tersebut dapat kembali terinfeksi penyakit yang sama. Sistem persamaan diferensialnya menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma R, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = VI - \gamma R \quad (3)$$

Penelitian ini membahas bagaimana menurunkan model matematisnya untuk epidemi SIRS dengan time delay sehingga menghasilkan model epidemi, dari model epidemi tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial. Dari persamaan diferensial yang sudah terbentuk tadi dapat dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan epidemi kemudian menganalisis kestabilannya. Kemudian mengidentifikasi apakah time delay tersebut mempengaruhi atau tidak mempengaruhi stabilitas pada kesetimbangan bebas penyakit dan pada kesetimbangan endemi penyakit dengan memodifikasi pada dinamika transmisinya.

Sistem persamaan diferensial Autonomous

(Boyce dan Diprima ((2001) Misalkan suatu persamaan diferensial *autonomous* dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{m} = Y(x) \quad (4)$$

Dengan Y adalah fungsi kontinu bernilai real dari x dan mempunyai turunan parsial kontinu. Pada persamaan (1) disebut persamaan diferensial *autonomous* karena tidak mendatangkan t di dalam.

Sistem persamaan diferensial

(Waluya (2006)). Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau

beberapa turunan fungsi yang tidak diketahui Jenis-jenis persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan diferensial parsial. Sedangkan persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear.

Persamaan diferensial linear adalah jika memenuhi dua hal yaitu pada variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya atau turunan yang satu dengan turunan lainnya atau variabel terikat dengan sebuah turunan. Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial yang bukan merupakan persamaan diferensial linear. Pada istilah dengan linear berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y^1, \dots, y^m$ berderajat satu atau nol Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde- n adalah $a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = f(x)$

Pada persamaan diferensial $F(x, y^1, \dots, y^m) = 0$ adalah merupakan persamaan diferensial nonlinear, jika salah satu dari berikut di penuhi F : F tidak berbentuk polinom, dalam $y, y^1, \dots, y^m$ dan F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari dua dalam $y, y^1, \dots, y^m$. (Waluya, 2006).

Titik kesetimbangan dan kestabilan

(Haberman (1987)) Dengan menggunakan titik kesetimbangan maka suatu sistem dapat lebih memudahkan untuk

mengamati perilaku kestabilannya. Berikut ini adalah definisi titik kesetimbangan.

Definisi 1 Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika dituangkan dalam bentuk persamaan diferensial maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol. Suatu titik $\hat{m} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem persamaan $\dot{m} = F(x)$, εR^n jika memenuhi persamaan

$$f(m^*) = 0,$$

dimana $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(m_1, m_2, \dots, m_n) \\ f_2(m_1, m_2, \dots, m_n) \\ \vdots \\ f_n(m_1, m_2, \dots, m_n) \end{pmatrix}$ Dalam

sistem epidemiologi dikenal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam populasi sedangkan titik kesetimbangan endemik adalah dimana penyakit selalu menetap dalam populasi. Berikut ini adalah definisi kestabilan titik kesetimbangan menurut (Guckenheimer dan Holmes (1983)).

Definisi 2 Kestabilan titik kesetimbangan dari sistem $\dot{m} = Fx$ dan m^0 adalah titik asal.

1. Kestabilan disebut stabil, jika untuk setiap $\lambda > 0$ terdapat $\vartheta(\lambda) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $m^0 \in R^n$ dengan

$\|m^0 - m^*\| < \lambda$, solusi $\rho(t, m^0)$ dari $F(x)$ yang melalui m^0 di $t = 0$ memenuhi pertidaksamaan $\|\rho(t, m^0) - m^*\| < \lambda$ untuk setiap $t \geq 0$.

2. Kestabilan disebut stabil asimtotik, jika m^* stabil dan terdapat $b > 0$, sedemikian hingga $\|\rho(t, m^0) - m^*\| \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow \infty$ untuk semua m^0 yang memenuhi $\|m^0 - m^*\| < b$.

3. Kestabilan disebut tidak stabil, jika terdapat suatu $\ell = 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $\lambda = 0$ terdapat sebuah m^0 dengan $\|m^0 - m^*\| < \lambda$ dan $t_0 > 0$ sedemikian hingga $\|\rho(t_0, m^0) - m^*\| > \ell$.

Pada definisi 2, dapat ditarik kesimpulanya bahwa sistem $\dot{m} = F(x)$ disebut stabil pada titik kesetimbangan kestabilan jika pada kondisi awal (m^0) berada di sekitar kestabilan sejauh λ , dengan λ adalah bilangan positif terkecil maka sifat solusi sistem $\rho(t, m^0)$ berada di sekitar kesetimbangan kestabilan. Jika kondisi awal berada sangat dekat dengan kestabilan dan solusi sistem cenderung mendekati titik kesetimbangan kestabilan, maka sistem disebut stabil asimtotik. Jika sifat solusi menjauh dari titik kesetimbangan kestabilan akibat perubahan kecil pada kondisi awal maka sistem disebut tidak stabil.

Teorema 1 (Finizio dan Ladas (1982)) Jika matriks A pada sistem persamaan (1) adalah matriks koefisien dengan nilai eigen

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, maka titik kesetimbangan m^* , disebut

1. Stabil, jika $(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$
2. Stabil asimtotik, $(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$
3. Tidak stabil, $(\lambda_s) > 0$, untuk suatu s

Pada teorema (1) dapat dipergunakan untuk menentukan kestabilan lokal suatu titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang stabil atau stabil asimtotik hanya pada suatu daerah tertentu dalam lingkup solusi sistem dikatakan stabil lokal atau stabil asimtotik. Titik kesetimbangan dikatakan stabil global atau stabil asimtotik global jika titik kesetimbangan tersebut atau stabil asimtotik pada setiap lingkup solusi sistem.

Nilai eigen dan vektor eigen

Dalam hal ini, penulis menganggap bahwa $R_0 > 1$. Dengan menggunakan time delay sebagai bifurkasi sebagai parameternya. (Anton (1998)) Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x didalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yaitu,

$$Ax = \delta x \quad (5)$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan ini. Sehingga akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (6)$$

Persamaan (5) dinamakan persamaan karakteristik A , Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A . Bila diperluas, maka determinan $\det(\lambda I - A)$

adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari A .

Bilangan reproduksi dasar (R_0)

(Hethcote (2000)) Untuk mengetahui tingkat penyebaran pada suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar. Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi tergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah potensi penularan penyakit pada populasi rentan merupakan rata-rata jumlah individu yang terinfeksi secara langsung oleh seseorang penderita selama masa penularannya bila termasuk dalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

(Liu (2013)) R_0 adalah nilai yang menunjukkan apakah penyebaran penyakit menjadi epidemi atau tidak epidemi pada suatu populasi.

$$R_0 = \frac{b\beta_1}{d(d + \mu + \delta)} \quad (7)$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan parameter yang penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks jacobian pada titik keseimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik keseimbangan endemik (*endemi equilibrium*).

Model Epidemi

(Lowe dan Kostrzewski (1973)) Ilmu yang membahas mengenai penyebaran penyakit disebut epidemiologi. Epidemiologi

adalah studi tentang faktor yang menentukan frekuensi dan distribusi penyakit pada populasi manusia.

Epidemi adalah penyakit yang timbul sebagai kasus baru pada suatu populasi tertentu, dengan laju yang melampaui perkiraan. Suatu infeksi dikatakan sebagai endemik pada suatu populasi jika infeksi tersebut berlangsung di dalam populasi tersebut tanpa adanya pengaruh dari luar. Suatu infeksi penyakit dikatakan sebagai endemik bila setiap orang yang terinfeksi penyakit tersebut menularkannya kepada tepat satu orang lain.

(Kermack dan McKendrick 1927)) Model epidemi adalah merupakan suatu model matematika yang dapat digunakan untuk melihat laju penyebaran penyakit. Kondisi epidemi terjadi ketika ada salah satu individu rentan pada populasi tersebut, maka populasi tersebut memiliki peluang menjadi populasi rentan, dan kemungkinan besar infeksi tersebut akan mewabah pada populasi tersebut. Sehingga pada akhirnya seluruh individu dalam populasi berpeluang terinfeksi. Pada dasarnya model epidemi pada penyakit memiliki tiga kompartemen, yaitu *Susceptible*, *Invected*, *Recovered*, yang didefinisikan :

1. *Susceptible*, yaitu individu yang sehat dapat terinfeksi.
2. *Invected*, yaitu individu yang terinfeksi memungkinkan untuk menularkan penyakit.
3. *Recovered*, yaitu seseorang yang memiliki kekebalan karena telah terinfeksi, dan dapat sembuh.

Sehingga, model epidemik suatu penyakit dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{dS}{dt} = a(S, I, R),$$

$$\frac{dI}{dt} = b(S, I, R),$$

$$\frac{dR}{dt} = c(S, I, R). \quad (8)$$

Dengan $S \in \mathbb{R}^r, I \in \mathbb{R}^s, R \in \mathbb{R}^n; r, s, n \geq 1$
 $; h(X, 0, 0) = 0$.

Dalam model epidemi misalkan $S_0 = (X^*, 0, 0) \in \mathbb{R}^{r,s,n}$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem persamaan (8), yang didapatkan dari persamaan

$$a(S^*, I, R) = 0, b(I^*, 0, 0) = 0, c(R^*, 0, 0) = 0$$

Kemudian diasumsikan persamaan $b(S^*, I, R) = 0$ sehingga diperoleh solusi $Y = \dot{n}(S^*, I)$. Oleh karena itu dapat diperoleh sebuah matriks $n \times n$,

$$T = \frac{\partial}{\partial S} h(S^*, \dot{n}(S^*, 0), 0).$$

Misalkan T dapat dituliskan dalam bentuk

$$T = K - L,$$

Dengan $K \geq 0, (d_{i,j} \leq 0)$ dan $L \geq 0$ adalah matriks diagonal.

Memodifikasi dinamika transmisi

(Huitao et al (2013)) dalam penelitiannya pada dampak media coverage memodifikasi dinamika transmisi menjadi seperti berikut :

$$g(I(t - \tau)) = \beta_1 - \frac{\beta_2 I(t - \tau)}{m + 1(t - \tau)}, \quad (9)$$

di mana $\tau > 0$ adalah time delay yang mewakili periode laten media coverage. Sehingga model dapat dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b - dS(t) - \left\{ \beta_1 - \frac{\beta_2 I(t-\tau)}{m+1(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) + \gamma R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \left\{ \beta_1 - \frac{\beta_2 I(t-\tau)}{m+1(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) - (d + \mu + \delta)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu I(t) - (d + \gamma)R(t) \quad (10)\end{aligned}$$

Penulis memodifikasi dinamika transmisi menjadi seperti berikut,

$$g(I(t-\tau)) = \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + m+1(t-\tau)},$$

di mana penulis mendefinisikan $\tau > 0$ adalah time delay yang diartikan sebagai waktu periode kesembuhan dari individu *invected* sampai menjadi individu *recovered*. Sehingga model dapat dimodifikasi menjadi

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - dS(t) - \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + m+1(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) + \gamma R(t), \quad (11)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + m+1(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) - (d + \mu + \delta)I(t), \quad (12)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - (d + \gamma)R(t) \quad (13)$$

Kemudian untuk mengetahui pengaruh time delay pada sistem persamaan (11)-(13) penulis mengasumsikan bahwa nilai awal sistem persamaan (11)-(13) mengambil bentuk seperti berikut :

$$S = \phi_1, I = \phi_2, R = \phi_3 \geq 0, \phi_i \in [-\tau, 0], \phi_1(0) > 0 \quad (14)$$

Titik kesetimbangan bebas Penyakit (E_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit dalam populasi. Pertama terlebih

dahulu menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit, misalkan titik tersebut dituliskan $E_0 = (S_0, I_0, R_0)$. Karena populasi bebas dari penyakit maka $I_0 = 0$, yaitu suatu keadaan dimana tidak terjadi infeksi pada populasi. Untuk mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (11)-(13) dimana $\tau = 0$.

Kestabilan lokal pada (E_0)

Persamaan karakteristik dari persamaan (11)-(13) pada (E_0) adalah yang setara dengan

$$(\lambda + d)(\lambda + d + \gamma)(\gamma + d + \mu + \delta - \frac{\beta_1 b}{d}) = 0 \quad (15)$$

Sehingga semakin mudah untuk diamati bahwa, ketika $R_0 < 1$, pada persamaan (15) memiliki tiga nilai eigen negatif < 0 , maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan nilai eigen maka titik kesetimbangan (E_0) = $(b/d, 0, 0)$ adalah stabil asimtotik lokal, ketika $R_0 > 1$, pada persamaan (15) memiliki satu nilai eigen positif > 0 dan dua nilai eigen negatif < 0 , maka berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan nilai eigen maka titik kesetimbangan (E_0) = $(b/d, 0, 0)$ adalah tidak stabil. Penulis menggunakan teorema seperti berikut

Teorema 1 Untuk setiap time delay $\tau \geq 0$, penulis mempergunakan

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

2. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) adalah tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Titik kesetimbangan epidemi (E^*)

Titik kesetimbangan epidemi (*endemic equilibrium*) adalah dimana didalam kondisi populasi terjadi penyebaran penyakit yang dihasilkan dari nilai R_0 yang didapatkan dari nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sebelum menentukan titik kesetimbangan endemi pada model, diberikan bilangan reproduksi dasar R_0 menurut (Liu 2013)), yang didefinisikan sebagai jumlah individu dalam populasi yang terinfeksi baru yang diproduksi dari satu individu terinfeksi pada saat semua individu rentan. Laju satu individu terinfeksi menularkan ke individu rentan adalah βS .

Analisis kestabilan titik kesetimbangan model SIRS

Lemma 3.1 Pada $\tau > 0$, Penulis mempergunakan :

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dari sistem persamaan (11)-(13) adalah stabil asimtotik global pada Γ jika $R_0 < 1$.

2. Titik kesetimbangan endemik (E^*) dari sistem persamaan (11)-(13) adalah tidak stabil asimtotik global pada Γ jika $R_0 > 1$.

Hasil dan Pembahasan

Penurunan model epidemi SIRS dengan time delay adalah sebagai berikut :

1. Laju perubahan populasi *Susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju pertambahan rekrutmen pada populasi manusia (b). Populasi *Susceptible* sepanjang waktu (t) akan berkurang akibat laju kematian

alami pada *Susceptible* ($dS(t)$) dan dipengaruhi kekuatan penyebaran infeksi pada *Susceptible* β_1 dan akan berkurang akibat adanya $I / \beta_2 + mI$ dengan dipengaruhi time delay, dan kekuatan penyebaran infeksi dipengaruhi pada *Recovered* γ dan berpengaruh laju antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh maka dapat ditulis

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - dS(t) - \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + mI(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) + \gamma R(t),$$

2. Laju perubahan populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan populasi *Invected* sepanjang waktu (t) akibat kekuatan penyebaran infeksi pada *Susceptible* β_1 dan akan berkurang akibat dipengaruhi kekuatan penyebaran infeksi pada *Susceptible* β_1 dan akan berkurang akibat adanya $I / \beta_2 + mI$ dengan dipengaruhi time delay. Bertambahnya populasi *Invected* per satuan waktu dipengaruhi faktor laju kematian alami, laju kesembuhan tiap individu yang sakit menjadi individu rentan, laju kematian tiap individu yang disebabkan oleh penyakit pada populasi yang terinfeksi penyakit *Invected* ($d + \mu + \delta$) $I(t)$ dan laju perubahan yang rentan menjadi terinfeksi pada populasi *Invected*, maka dapat ditulis

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left\{ \beta_1 - \frac{I(t-\tau)}{\beta_2 + mI(t-\tau)} \right\} S(t)I(t) - (d + \mu + \delta)I(t),$$

3. Laju perubahan populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan populasi *Recovered* per satuan waktu merupakan akibat laju perubahan status dari terinfeksi penyakit terhadap populasi *Invected*

$(\mu I)(t)$ dan berpengaruh antara individu yang terjangkit penyakit menjadi individu terinfeksi kemudian individu yang telah sembuh. Selain itu, berkurangnya populasi *Recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju kematian alami tiap individu d pada populasi *Recovered* (t) dan laju kehilangan kekebalan tiap individu terhadap penyakit dan akan kembali menjadi individu rentan penyakit γ , maka dapat ditulis

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - (d + \gamma)R(t)$$

Contoh model matematika epidemi SIRS dengan time delay

Contoh pertama dan contoh kedua membahas sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay dengan memperhatikan kestabilan titik kesetimbangannya. Contoh ini bertujuan memberikan gambaran mengenai sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay dengan memberikan dan memperhatikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi nilai bilangan reproduksi dasar R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan. Dalam penelitian ini dianalisis kesetimbangan dan kestabilan untuk dua kondisi, yaitu ketika $R_0 < 1$ pada saat $\tau > 0$, dimana kesetimbangan bebas penyakit stabil karena time delay tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit dan ketika $R_0 > 1$, kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay. Pada contoh ketiga akan membahas model SIRS dengan tanpa time delay. Contoh ini bertujuan untuk

memperbandingkan model SIRS dengan time delay dan tanpa time delay.

Contoh 1 Jika $R_0 < 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut dimana nilai $b = 20$, $d = 0,03$, $\beta_1 = 0,0003$, $\beta_2 = 0,00019$, $m = 40$, $\delta = 0,2$, $\mu = 0,06$, $\gamma = 0,02$.

Dengan $\frac{b}{d} = 667$, sesuai dengan (7),

penulis menghitung $R_0 = 0,6896 < 1$. Selain itu penulis mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (667,0,0)$. Dari teorema (1), diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay $\tau \geq 0$.

Contoh 2 Jika $R_0 > 1$

Perilaku sistem persamaan epidemi SIRS dengan time delay diperlihatkan dengan pertama kali menentukan nilai parameternya. Nilai-nilai parameter adalah sebagai berikut dimana nilai $b = 20$, $d = 0,03$, $\beta_1 = 0,003$, $\beta_2 = 0,0019$, $m = 40$, $\delta = 0,2$, $\mu = 0,06$, $\gamma = 0,02$. Dengan

$\frac{b}{d} = 667$, sesuai dengan (7), penulis menghitung $R_0 = 6,8965 > 1$.

selain itu, penulis mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (667,0,0)$ dan titik kesetimbangan epidemi $E^* = (345.7518, 82.9156, 96.9643)$ dari sistem

persamaan (11)-(13). Dengan demikian dari teorema (1), diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah tidak stabil asimtotik lokal untuk setiap saat time delay $\tau \geq 0$ dan titik kesetimbangan endemik E^* adalah stabil untuk $\tau \in [0, 61.8649)$.

Penutup

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini menunjukkan bahwa kesetimbangan bebas penyakit stabil global untuk semua $\tau > 0$ ketika bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$. Dapat dikatakan, time delay tidak dapat mempengaruhi kestabilan kesetimbangan bebas penyakit. Dengan kata lain, pengaruh time delay dapat diabaikan untuk $R_0 < 1$. Namun, ketika, $R_0 > 1$ kestabilan kesetimbangan endemi akan dipengaruhi oleh time delay.

Berdasarkan Lemma 1 bahwa sistem persamaan (11)-(13) dengan $\tau = 0$ tidak memiliki solusi periodik nontrivial.

Catatan bahwa I sumbu dan R sumbu adalah berjenis tidak bervariasi dan orbit sistem tidak saling berpotongan. Dengan demikian, tidak ada solusi yang melintasi sumbu koordinat. Pada sisi lain, jika sistem memiliki periodik solusi, maka harus ada keseimbangan dibagian dalamnya dan E_0 terletak di sumbu koordinat. Kemudian, penulis menyimpulkan bahwa orbit periodik sistem harus terletak di kuadrat pertama. Dari Lemma 1, keseimbangan positif asimtotik stabil dan global stabil di R_+^3 , dengan

demikian, tidak ada orbit periodik di kuadrat pertama.

Untuk para peneliti selanjutnya, peneliti mengharapkan memberikan nilai parameter dengan menambah beberapa parameter lagi.

Daftar Pustaka

- Anderson, R. M. and May, R. M. (1991). *Infectious Diseases Of Humans : Dynamics and Control*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- Anton, H. (1998). *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.
- Enatsu, Y. and Messina, E. (2012). Global Dynamics of a Delayed SIRS Epidemic Model with Class of Non Linear Incidence Rates. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 218, No 9, 5327--5336.
- Finizio, N. and Ladas, G. (1982). Introduction to Differential Equations with Difference Equations. *Mathematics Computing*.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vektor fields*, Springer, New York. Verlag.
- Hethcote, H. W. (2000). *Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM, Vol. 42, 599--653.
- Haberman, R. (1997). *An Introduction to Applied Mathematics, Mathematical Models*, Prentice-Hall, Inc.
- Hale, J. and Lunel, S. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, New York. USA.
- Huitao, Zhou. and Yiping, Lin. (2013). An SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Time Delay. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2013, Hindawi publishing Corporation.
- Karmack, W. O and McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*, Volume 115, 700--721.
- Liu, W. (2013). A SIRS epidemic model incorporating media coverage with random perturbation. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2013, Article ID.
- Lowe, C. R and Kostrzewski, J. (1973). *Epidemiology, A Guide to Teaching Method*, Churchill Livingstone.
- Waluya, S. B. (2006). *Persamaan Differensial Biasa*. Graha Ilmu, Yogyakarta.