Interpretasi Kombinatorial Bilangan Euler

Rektor Sianturi[1]

Abstrak

Kombinatorial bilangan Euler ialah suatu proses yang menghitung banyaknya alternatif permutasi dari himpunan bilangan dengan jumlah genap. Interpretasi kombinatorial bilangan Euler membutuhkan pemahaman dasar mengenai penurunan (descent) dan kenaikan (ascent) dalam permutasi. Beberapa artikel dan buku membahas tentang bilangan Euler, kombinatorial bilangan Euler, barisan bilangan Euler, bentuk umum bilangan Euler dengan berbagai metode. Dalam penelitian ini akan membahas lebih lanjut bagaimana bentuk umum interpretasi kombinatorial bilangan Euler yang didefinisikan pada progres aritmatika umum $\{a, a + d, a + 2d, \ldots\}$ kemudian membentuk algoritmanya.

Kata kunci : *Bilangan Euler, Kombinatorial, Permutasi.*

[1] Rektor Sianturi, Mahasiswa S2 Matematika, FMIPA, Universitas Sumatera Utara, Email: rektors@yahoo.co.id

Pendahuluan

Kombinatorial (Combinatoric) adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek tanpa harus mengenumerasi terlebih dahulu. Solusi yang ingin diperoleh adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya. Pengaturan yang dimaksud adalah bagaimana objek-objek dapat dikombinasikan dalam berbagai susunan atau urutan yang menghasilkan output yang berbeda. Konsep kombinatorial yang dugunakan dalam penelitian ini salah satunya adalah permutasi.

Permutasi adalah salah satu bentuk umum dari kombinatorial. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak elemen yang sama. Selain itu, terdapat pula bentuk permutasi yang lebih khusus yaitu kombinasi. Kombinasi r elemen dari n elemen, atau C (n, r), adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Dalam kaitannya dengan kombinatorik, bilangan Euler muncul khusus ketika menghitung banyaknya alternative permutasi dari himpunan bilangan dengan jumlah genap. Interpretasi kombinatorial bilangan Euler dapat diperoleh setelah memahami pengertian penurunan (*descent*) dalam permutasi. Misalkan $p = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ adalah sebuah permutasi, i dikatakan suatu penurunan (*descent*) dari pihak p jika $p_i > p_{i+1}$, yang sama juga berlaku i dikatakan naik (*ascent*) jika $p_i < p_{i+1}$. *Descent* menotasikan posisi p bukan entri dari p (Bona, 2004).

Kombinatorial Bilangan Euler

Sejak tahun 1950an, ahli matematika telah berhasil menginterpretasi bilangan-bilangan Euler kuno dan q-bilangan Euler secara kombinatorial. Kombinatorial bilangan Euler dapat dipahami melalui tahapan definisi kenaikan *(ascent),* cara perhitungan kenaikan *(ascent)* seperti pada Definisi 1 dan 2.

Definisi 1. *Diberikan suatu bilangan bulat positif n, dan* Ωn *didefinisikan sebagai himpunan semua permutasi dari* $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Pada suatu permutasi* $\pi = p_1p_2p_3....p_n \in \Omega n$, *i disebut sebuah kenaikan* (ascent) *dari* π *jika* $p_1 < p_{i+1}$; *i disebut kelebihan yang lemah dari* π *jika* $p_1 \geq i$.

Perlu diketahui bahwa suatu bilangan Euler kuno $A_{n,k}$ merupakan banyaknya permutasi $\pi \in \Omega n$ yang mempunyai k buah kelebihan yang lemah (Riordan, 1958) dan $A_{n,k}$ memenuhi pengulangan :

$$A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n+1-k)A_{n-1,k-1} (1 \leq k \leq n)$$

(1)

Selain rumus rekursif pada persamaan (1) $A_{n,k}$ dapat dihitung secara langsung melalui rumus analitik berikut (Bona, 2004) :

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (k-i)^n \binom{n+1}{i} (1 \leq k \leq n) \quad (2)$$

Dalam setiap permutasi π, difinisikan jumlah penurunan *(descent)* atau kenaikan *(ascent)* sebagai :

Definisi 2. *Diberikan suatu permutasi* $\pi = p_1p_2p_3...p_n \in \Omega_n$, *definisikan fungsi:*

$$maj\ \pi = \sum_{p_j > p_{j+1}} j, \qquad (3)$$

$A(n, k, i) = \neq \{\pi | ma\ j\ \pi = i\ \&\ \pi$ memiliki k kenaikan *(ascent)*}

Sejak tahun 1950an, Carlitz (1954, 1975) telah membentuk generalisasi hasil penelitian Euler ke-q barisan $\{1, q, q^2, q^3, ...\}$. berdasarkan definisi Carlitz, q-bilangan Euler $A_{n,k}(q)$ diberikan sebagai:

$$A_{n,k}(q) = q^{(m-k+1)(m-k)/2} \sum_{i=0}^{k(m-k-1)} a(n, n-k, i) q^2 \quad (4)$$

Dimana fungsi $a(n, k, i)$ didefinisikan dalam Definisi 2.

Interpretasi Kombinatorial Bilangan Euler Umum

Konsep-konsep dan sifat-sifat yang digunakan untuk menginterpretasikan kombinatorial bilangan Euler adalah sebagai berikut :

Definisi 3. *definisikan bahwa $L_{n,k}$ adalah himpunan n permutasi dengan k kelebihan yang lemah. Selanjutnya didefinisikan $|L_{n,k}| = A_{n,k}$ (yakni banyaknya n permutasi dengan k kelebihan yang lemah sama dengan bilangan Euler kuno). Kemudian, pada sebuah permutasi $\pi = p_1p_2p_3...p_n$, misalkan* $Q_n(\pi) = 1$ *dimana $P_i=n$.*

Sebuah permutasi $\pi \in \Omega_n$ dapat ditulis sebagai sebaris $\pi = p_1p_2p_3...p_n$, atau π dapat juga ditulis sebagai gabungan yang saling lepas dari *cycle-cycle* yang berbeda. Jika π ditulis dalam suatu bentuk *cycle,* maka selanjutnya dapat menggunakan representasi standar melalui penulisan. (Stanley, 1996):

(a) Setiap *cycle* bermula dari elemen terbesarnya

(b) *Cycle* berada dalam urutan naik dari elemen terbesarnya

Penjelasan lengkapnya, jika diberikan permutasi π ditulis dalam suatu bentuk *cycle* representasi standar, definisikan fungsi f sebagai $f(\pi)$ menjadi permutasi yang diperoleh dari π melalui penghapusan tanda kurung. Kemudian f dikenal sebagai fungsi bijektif fundamental dari Ω_n ke dirinya sendiri (Bona, 2004). Selain itu, invers pemetaan f^{-1} dari fungsi fundamental f juga dikenal dalam ilustrasi hubungan antara kenaikan (*ascent*) dan kelebihan lemahnya (Bona, 2004).

Proposisi 1. *Fungsi f^{-1} memberikan bijeksi antara himpunan permutasi pada* [*n*] *k kenaikan dan himpunan $L_{n,k+1}$* (Xiong *et al.*, 2014).

Contoh :

Representasi standard permutasi π = 5243716 adalah (2)(43)(7615) $\in \Omega_7$ dan $f(\pi)$ = 2437615; $Q_7(\pi) = 5$; π = 5243716 mempunyai 3 buah kenaikan, sementara $f^{-1}(\pi)$ = (5243)(716) = 6453271 $\in W_{7,4}$ mempunyai 3 + 1 = 4 kelebihan yang lemah karena $p_1 = 6 > 1$, $p_2 = 4 > 2$, $p_3 = 5 > 3$, dan $p_6 = 7 > 6$.

Penjelasan contoh: sesuai dengan penjelasan dalam Stanley (1996), bahwa suatu permutasi dapat dituliskan dalam bentuk *cycle* standar sehingga π = 5243716 mempunyai salah satu permutasi (2)(43)(7615) (berbentuk *cycle*), masing-masing *cycle* bermula dari elemen terbesarnya, perhatikan $f^{-1}(\pi)$ = (5243)(716)(*cycle*) = 6453271 (tanda kurung dihapus). Permutasi 6453271 mempunyai 4 penurunan (*descent*) yaitu 6 ke 4, 5 ke 3, 3 ke 2, dan 7 ke 1. Selain itu, memiliki 4 kelebihan yang lemah karena $p_1 = 6 > 1$, $p_2 = 4 > 2$, $p_3 = 5 > 3$, dan $p_6 = 7 > 6$.

Sekarang andaikan akan dibentuk barisan yang terdiri dari k bar vertikal dan n bilangan bulat positif. Kemudian k bar vertikal membagi n bilangan bulat positif tersebut ke dalam $k + 1$ bagian. Dalam setiap bagian, tidak terdapat satupun bolangan atau terdapat semua bilangan yang didaftar dalam urutan menurun, perhatikan Definisi 4 (Bona, 2004).

Definisi 4. *Suatu bar disebut asing jika :*

(a) Segera diikuti oleh bar yang lain, atau
(b) Setiap bagian sisa baik kosong atau berisi bilangan bulat berada dalam urutan menurun jika bar ini dihapus.

Contoh: Misalkan n = 7, k = 4 maka susunannya sebagai berikut :

32|1||7654|,

bar pertama, kedua dan keempat saling asing.

Sehingga diperoleh interpretasi kombinatorial bilangan Euler $A_{n,k}(a, d)$ dengan catatan pertama bahwa :

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

(5)

menyiratkan bahwa $A_{n,k}$ (a, d) merupakan polinomial homogen berderajat n yang berhubungan ke a dan d. Selain itu,

$$A_{n,k}(a,d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)(d-a) + (k-i)a]^n \binom{n+1}{i}$$

(6)

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)^{n-j} (k-i) \binom{n+1}{i} \right] x \binom{n}{j} (d-a)^{n-j} a^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_{n,k}(j) \binom{n}{j} (d-a)^{n-j} a^j$$

Dimana

$$C_{n,k}(j) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^{n-j} (k-i)^j \binom{n+1}{i}, (0 \le j \le n)$$

(7)

Berikut penjelasan tentang interpretasi kombinatorial untuk koefisien $C_{n,k}(j)$ $(0 \le j \le n)$

Andaikan bilangan Euler $A_{n,k}(a,d)$ ditulis seperti pada persamaan (7), maka $C_{n,k}(j) = f\,\{\pi \in L_{n,k+1}, (j < Q_n(\pi) \le n)\} + f\{\pi \in L_{n,k}, (1 < Q_n(\pi) \le j)\}$ (8)

Persamaan (8) dapat dibuktikan untuk dua nilai $j = 0$ dan $j = n$ adalah benar sehingga diperoleh :

Jika $j = 0$, $C_{n,k}(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^n \binom{n+1}{i} = A_{n,k+1}$;

Jika $j = n$, $C_{n,k}(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k-i)^n \binom{n+1}{i} = A_{n,k}$

Oleh karena itu, persamaan (8) benar untuk $j = 0$, dan $j = n$

Secara umum, untuk $(1 \le j \le n-1)$, tuliskan k bar dengan $k + 1$ bagian diantaranya. Tempatkan setiap elemen dari $[n]$ ke dalam suatu bagian. Jika tidak terdapat k bar asing, maka susunan dipasangkan ke permutasi dengan k kenaikan. Misalkan B himpunan susunan dengan paling banyak satu bar asing pada bagian ujung dan tidak terdapat bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., j\}$ dalam bagian akhir. Akan ditunjukkan bahwa $C_{n,k}(j) = |B|$.

Tujuan dapat tercapai dengan menggunakan Prinsip Inklusi Eksklusi. Ada

$(k+1)^{n-j}k^j$ cara meletakkan n bilangan ke dalam $k+1$ bagian dengan elemen-elemen {1, 2, 3, ..., j) yang menghindari bagian-bagian akhir.

Misal B, menotasikan banyaknya susunan bilangan dengan ciri-ciri sebagai berikut :

(1) tidak ada {1, 2, 3, ..., j} dalam bagian akhir
(2) setiap susunan bilangan B_i paling sedikit memiliki satu bar asing
(3) dalam setiap susunan B_i, ada bar asing yang diletakkan tidak saling bersebelahan satu sama lain.

Selanjutnya, prinsip Inklusi dan Eksklusi menunjukkan bahwa:

$$|B| = (k+1)^{n-j}k^j - B_1 + B_2 + ... + (-1)^k B_k \quad (9)$$

Sekarang, pertimbangan nilai B_i, dengan syarat ($1 \leq i \leq k$). Andaikan bahwa ada $k+1-i$ bagian dengan $k - i$ bar diantaranya, sehingga ada $(k + 1 - i)^{n-j}$ $(k - i)^j$ cara ini memasukkan n bilangan ke dalam $k + 1 - i$ bagian dengan menghindari j bilangan bulat pertama masuk ke bagian akhir dan daftar komponen bilangan bulat yang berada dalam urutan menurun. Kemudian masukkan i bar asing secara terpisah ke dalam $n+1$ posisi, sehingga diperoleh:

$$B_i = (k + 1 - i)^{n-j}(k - i)^j \binom{n+1}{i} \quad (10)$$

Substitusi persamaan (10) ke dalam persamaan (9), maka diperoleh $C_{n,k}(j) = |B|$

Diberikan susunan $\pi \in B$, hapus bar sehingga diperoleh permutasi $\pi \in \Omega$. Oleh karena itu, hanya gunakan notasi yang sama yaitu π untuk merepresentasi kedua susunan himpunan B dan permutasi pada [n]. Sekarang untuk $\pi \in B$, π yang lain :

1. (Kasus 1) tidak terdapat bar asing dan {1, 2, 3, ..., j} tidak berada pada bagian akhir atau
2. (kasus 2) hanya ada satu bar asing di bagian akhir

Jika π berada dalam kasus 1, maka π mempunyai k buah kenaikan karena setiap bar tidak saling asing dan pada bagian akhir dari π tidak kosong. Oleh karena itu, *cycle* akhir fungsi $f^{-1}(\pi)$ menjadi $(n...p_9)$. Dengan kata lain, $Q_n(f^{-1}(\pi)) = p_9 > j$ karena tidak terdapat $(1,2...,j)$ pada bagian akhir. Berdasarkan proposisi 1. $f^{-1}(\pi) \in L_{n,k+1}$.

Jika π berada dalam kasus 2, maka π mempunyai $k - 1$ kenaikan karena hanya bar akhir yang asing. Dengan catatan bahwa dalam kasus ini, susunan dengan tidak adanya elemen $(1, 2, ...,j)$ dalam bagian akhir atau bagian akhir yang tidak kosong telah dihapus dengan menggunakan Prinsip Inklusi Eksklusi. Dengan arti yang sama, paling sedikit satu bilangan dari $(1, 2,...,j)$ harus berada dalam bagian kedua ke bagian akhir. Jadi, *cycle* fungsi $f^{-1}(\pi)$ menjadi $(n...p_i)$ dan Q_n $(f^{-1}(\pi)) = p_i \leq j$ berdasarkan proposisi 1. $f^{-1}(\pi) \in L_{n,k}$.

Gabungan semua hasil pada kasus 1 dan 2, membuktikan persamaan (8) benar.

Berikut menjelaskan beberapa sifat penting koefisien $C_{n,k}$.

Misalkan koefisien $C_{n,k}$ seperti yang dituliskan pada persamaan (8), maka:

1. $\sum_{i=0}^{k} C_{n,k}(j) = n!$ untuk $0 \leq j \leq n$

2. $C_{n,k}(j) = C_{n,\,n-k}(n-j)$ untuk semua $0 \le j, k \le n$

Koefisien $C_{n,k}$ membutuhkan lemma persamaan (11) sebagai :

Lemma 1. *Jika terdapat n bilangan positif maka:*

$F\{\pi \in L_{n,k} \,\&\, Q_n(\pi) = j\} = f\{\pi \in L_{n,n+1-k} \,\&\, Q_n(\pi) = n + 1 - j\}$ (11)

dengan syarat $1 \le k, j \le n$.

Pembuktian. Langkah awal, diberikan n bilangan bulat positif, didefinisikan fungsi $g : \Omega_n \to \Omega_n$

Untuk $\pi = p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Omega_n$

$g(n) = (n + 1 - p_1)\,(n + 1 - p_2)\ldots(n + 1 - p_n)$ (12)

untuk tingkat pertama, $\pi = 13452 \in \Omega_5$ $g(\pi) = 53214$, g merupakan fungsi bijektif dari Ω_n ke dirinya sendiri.

Sekarang untuk variabel tetap $1 \le k, j \le n$, anggap $S_{kj} = \{\pi \in W_{n,k} \,\&Q_n(\pi) = j\}$ dan $T_{kj} = \{\pi \in W_{n,n+1-k} \,\&Q_n(\pi) = n + 1 - j\}$. Untuk sebarang $\pi \in S_{kj}$ tulis π dalam bentuk representasi *cycle* standard. Jadi $\pi = (p_u\ldots)\ldots(n\ldots j)$ dan $f(\pi) = p_u\ldots n\ldots j$ mempunyai (k-1) kenaikan *(ascent)*. Sekarang komposisi fungsi $f(\pi)$ dengan fungsi bijektif g terdefinisi. Kemudian g (f(π)) mempunyai n + 1- k kelebihan yang lemah sehingga $f^{1}g(f(\pi)) \in L_{n,\,n+1-k}$. Suatu catatan bahwa *cycle* akhir $f^{1}g(f(\pi))$ telah menjadi ($n\ldots n$+1 – j). Oleh karena itu, $f^{1}g(f(\pi)) \in T_{kj}$. Oleh karena kedua fungsi f dan g adalah fungsi bijektif, $f^{1}gf$ juga bijektif antara S_{kj} dan T_{kj}.

Dengan demikian, koefisien $C_{n,k}$ yang $\sum_{i=0}^{k} C_{n,k}(j) = n!$ untuk $0 \le j \le n$ dan $C_{n,k}(j) = C_{n,n-k}(n-j)$ untuk semua $0 \le j \le n$ dapat dibuktikan dengan cara :

Langkah pertama, melalui persamaan (8), diperoleh:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(j) = \sum_{k=0}^{n} f\{\pi \in L_{n,k+1},\, j < Q_n(\pi) \le n\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f\{\pi \in L_{n,k}, 1 \le Q_n(\pi) \le j\} +$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\{\pi \in L_{n,k}\} = |\Omega_n| = n!$$

(13)

Langkah kedua,

$C_{n,k}(j)$

=

$$\sum_{i=j+1}^{n} f\{\pi \in L_{n,k+1}, Q_n(\pi) = i\} + \sum_{m=1}^{j} f\{\pi \in L_{n,k}, Q_n(\pi) = m\}$$

$$= \sum_{i=j+1}^{n} f\{\pi \in L_{n,n-k}, Q_n(\pi) = n + 1 - i\} + \sum_{m=1}^{j} \sharp\{\pi \in L_{n,n+1-k}$$

$Q_n(\pi) = n + 1 - m\}$

Oleh lemma 4.5 = $f\{\pi \in L_{n,k}, 1 \le Q_n(\pi) \le n - j\}$ + $\sharp\{\pi \in L_{n,n+k}, n\text{-}j < Q_n(\pi) \le nj\} = C_{n,\,n-k}(n-j)$

(14)

Hasil Pembahasan

Berdasarkan ulasan-ulasan bilangan Euler dan kombinatorialnya yang telah dijabarkan sebelumnya diperoleh bahwa bilangan Euler kuno $A_{n,k}$ merupakan banyaknya permutasi $\pi \in \Omega_n$ yang mempunyai k buah kelebihan yang lemah (Riordan, 1958) dan $A_{n,k}$ memenuhi pengulangan :

$A_{n,k}$ memenuhi pengulangan :

$A_{n,1} = 1$, $(n \ge 1)$ $A_{n,k} = 0$, $(k > n)$

$A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n+1-k)A_{n-1,k-1}\ (1 \le k \le n)$

dapat dibentuk ke dalam suatu permutasi kemudian didefinisikan:

$$maj\,\pi = \sum_{p_j > p_{j+1}} j$$

Selanjutnya, gunakan representasi standar melalui penulisan setiap *cycle* bermula dari elemen terbesarnya dan *cycle* berada dalam urutan naik dari elemen terbesarnya. Perhatikan bar asing dengan aturan bahwa bar tersebut segera diikuti oleh bar yang lain, atau sietiap bagian sisa baik kosong atau berisi bilangan buat berada dalam urutan menurun jika bar ini dihapus. Oleh karena itu, diperoleh interpretasi kombinatorial bilangan Euler umum sebagai :

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

$$A_{n,k}(a,d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)(d-a) + (k-i)a]^n \binom{n+1}{i}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^{n-j} (k-i) \binom{n+1}{i} \right] x \binom{n}{j} (d-a)^{n-j} a^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_{n,k}(j) \binom{n}{j} (d-a)^{n-j} a^j$$

dengan

$C_{n,k}(j)$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [(k+1-i)^{n-j} (k-i)^j \binom{n+1}{i}, (0 \le j \le n)$$

Koefisien $C_{n,k}$ mempunyai $\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(j) = n!$ untuk $0 \le j \le n$ dan $C_{n,k}$ (j) $= C_{nk-k,}(n-j)$ untuk semua $0 \le j, k \le n$

Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan Euler dapat direpresentasikan dalam bentuk kombinatorial, *cycle*, pemisahan bilangan dengan menggunakan bar asing sehingga lebih mudah dipahami.

Algoritma Interpretasi Kombinatorial Bilangan Euler

Interpretasi kombinatorial bilangan Euler yang telah dijabarkan sebelumnya, akan lebih informatif jika dituangkan dalam suatu algoritma. Tujuannya ialah memudahkan pemahaman bagaimana interpretasi kombinatorial bilangan Euler. Algoritmanya adalah sebagai berikut:

Algoritma

Input : Permutasi $\Omega_n = \{\pi = p_1p_2...p_n\}$

Output : interpretasi kombinatorial bilangan Euler

1. Langkah 1 : didefinisikan $A_{n,k}$ sebagai banyak permutasi $\pi \in \Omega_n$ yang mempunyai k kelebihan yang lemah
2. Langkah 2 : Hitung *maj* π sebagai banyaknya penurunan *(descent)* dalam permutasi π
3. Langkah 3 : Gunakan representasi standar penulisan permutasi dalam bentuk *cycle* dimana setiap *cycle* bermula dari elemen terbesarnya dan *cycle* berada dalam urutan naik dari elemen terbesarnya.
4. Langkah 4: Perhatikan adanya bar asing dengan aturan bahwa bar tersebut segera diikuti bar lain, atau setiap bagian

sisa baik kosong ataupun berisi, bilangan bulat berada dalam urutan menurun jika bar itu dihapus.

5. Langkah 5 : Diperoleh interpretasi kombinatorial bilangan Euler secara umum sebagai :

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

6. Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menjabarkan langkah 5 sehingga tujuan akhir diperoleh

Berdasarkan langkah-langkah algoritma tersebut, untuk mempermudah memahami kombinatorial bilangan Euler dapat digunakan algoritma interpretasi kombinatorial bilangan Euler.

Penutup

Dalam tesis ini, penulis mengulas bentuk kombinatorial bilangan Euler, dimulai dari pengulasan bilangan Euler kuno yang telah diteliti oleh ilmuwan terdahulu dan menuangkan hasil penelitian sebagai berikut :

1. Diperoleh interpretasi kombinatorial bilangan Euler secara umum:

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [(k+1-i)d - a]^n \binom{n+1}{i}$$

2. Untuk mempermudah memahami kombinatorial bilangan Euler dapat digunakan algoritma interpretasi kombinatorial bilangan Euler.

Daftar Pustaka

Bona, M, 2004, *Combinatorics of Permutations.*Discrete Mathematics and its Applications. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC.

Carlitz, L. 1954. Q-bernoulli and Eulerian Numbers. *Transaction of the American Mathematical Society*, 76: 332-350.

Carlitz, L. 1975. A Combination Property of q-Eulerian Numbers. *The American Mathematical Monthly*, 82:51-54

Khattri, S.K., Witkowski, A. 2012. Euler's Number and Some Means*. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(4) : 369-377

Riordan, J. 1958. *An Introduction of Combinatorial Analysis.* Wiley Publication in Mathematical Statistics. New York : John Wiley & Sons.

Stanley, R.P. 1996. Enumerative Combinatorics, *vol 1. Of Cambridge Studies in Advanced Mathematics,* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Xiong, T. Tsao, H.P. and Hall, J.I. 2013, General Eulerian Numbers and Eulerian Polynomials, *Journal of Mathematics*, Article ID 629132, 9 pages.

Xiong, T. Tsao, H.P and Hall, J.I. 2014. Combinatorial Interpretation of General Eulerian Numbers, *Journal of Discrete Mathematics*, Article ID 870596, 6 pages.