PENERAPAN INDUKSI MATEMATIKA DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Miksalmina, S.Pd

ABSTRAK

Induksi matematika merupakan sebuah teknik pembuktian pernyataan yang berkaitan dengan objek diskrit yang sangat penting. Penerapan induksi matematika di dalam matematika yang menjadi pokok bahasan utama untuk menjabarkan bagaimana induksi matematika dapat membuktikan sebuah masalah matematika. Induksi matematika merupakan metoda pembuktian yang dapat pula digunakan dalam pembuktian kebenaran algoritma. Induksi matematika memiliki tiga tahapan pembuktian. Tahap pertama, ialah langkah basis dimana tahapan ini untuk membuktikan bila p(n), n = 1 benar. Tahap kedua, merupakan tahap langkah induksi, tahapan yang membuktikan bila p(n) benar maka p(n+1) benar. Tahapan terakhir ialah konklusi, yang menyatakan bahwa semua p(n) adalah benar bila kedua tahapan sebelumnya benar. Pembuktian matematika membahas tentang strategi pembuktian. Bukti langsung, bukti tak langsung, dan bukti kontradiksi. Proses yang digunakan dalam melakukan proses pembuktian ialah proses majumundur, yaitu proses yang memerlukan titik awal. Penerapan induksi matematika dalam pembuktian sebuah masalah matematika memiliki empat prinsip induksi. Pertama; induksi matematika sederhana, sebuah pembuktian dengan metode bukti langsung; induksi matematika yang dirampatkan; induksi kuat dan induksi umum matematika. Induksi matematika sebuah metoda pembuktian matematika yang valid.

Kata Kunci*: Penerapan, Induksi Matematika dan Pembuktian Matematika*

A. PENDAHULUAN

Banyak preposisi-preposisi dalam matematika memiliki bentuk preposisi umum, yaitu tingkat kebenarannya dijamin untuk semua elemen dari sebuah himpunan. Untuk membuktikan kebenaran dari proposisi tersebut, tentunya diperlukan suatu metode yang efektif dan tidak cenderung untuk mengecek kebenaran proposisi pada setiap elemen himpunan tersebut baik yang memiliki banyak elemen berhingga maupun tak hingga. Untuk membuktikan proposisi-proposisi dalam ruang lingkup himpunan sedemikian, muncullah suatu metode pembuktian yang dinamakan prinsip induksi matematika.

Pada awalnya prinsip induksi matematika hanya mengambil pada ruang lingkup proposisi-proposisi yang benar-benar berkaitan pada bilangan bulat, seperti jumlah dari suatu deret sepanjang n suku. Dengan berkembangnya metode dalam induksi matematika ini, induksi menjadi salah satu metode yang ampuh dalam menyelesaikan masalah-masalah yang tidak hanya berkaitan dengan bilangan bulat. Contohnya induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan indentitas-identitas dalam peluang (kombinatorial), graf, bahkan geometri.

Prinsip induksi matematika sendiri berdiri sebagai sebuah aksioma, artinya kita menerima kebenaran dari prinsip tersebut tanpa meminta buktinya, dan memang pada kenyataannya, " Prinsip Induksi Matematika dianggap sebagai salah satu dasar aksioma dalam beberapa teori matematika yang melibatkan bilangan asli"(jacobs,1996). Tulisan ini memaparkan bagaimana induksi matematika berperan dalam pembuktian matematika. Kenyataan ini hendaknya memberikan inspirasi bagi kita untuk mempelajari lebih mendalam, sehingga ketika kita dihadapkan pada sebuah permasalahan dalam matematika kita dapat menyelesaikan sesuai aturan.

B. TINJAUAN PUSTAKA

1. Pembuktian Matematika

Matematikawan memformulasikan konjektur dan kemudian mencoba membuktikan bahwa konjektur tersebut benar atau salah. Ketika dihadapkan dengan pernyataan yang akan dibuktikan yaitu: menerjemahkan setiap istilah dengan defenisinya, menganalisa arti dari hipotesis dan kesimpulan, dan mencoba membuktikan dengan menggunakan salah satu dari metode pembuktian. Jika pernyataan berupa implikasi; coba buktikan dengan bukti langsung. Bila gagal, coba dengan bukti tak langsung. Bila tidak berhasil juga coba dengan bukti kontradiksi.

2. *Induksi Matematika*

Induksi matematika ialah sebuah teknik pembuktian pernyataan yang berkaitan dengan objek diskrit (kompleksitas algoritma, teorema mengenai graf, identitas dan ketidaksaman yang melibatkan bilangan bulat, dsb) yang sangat penting. Induksi matematika tidak dapat digunakan untuk menemukan rumus atau teorema tetapi hanya sekedar untuk melakukan pembuktian.

Doerr (Munir, 2005:149) mengemukakan bahwa:

> “ induksi matematika berawal pada akhir abad ke-19, dua orang matematikawan yang mempelopori perkembangan induksi matematika adalah R.Dedekind dan G.Peano”.

Dedekind mengembangkan sekumpulan aksioma yang menggambarkan bilangan bulat positif. Peano memperbaiki aksioma tersebut dan memberikannya interpretasi logis. Keseluruhan aksioma tersebut dinamakan *postulat peano*.

Induksi matematika memiliki tiga tahapan pembuktian yaitu: (1) langkah basis; (2) langkah induksi; (3) konklusi. Pembuktian induksi matematika dapat diilustrasikan dengan fenomena: sederetan orang menyebarkan rahasia; efek domino yang dijajarkan dan kemudian dijatuhkan.

3. *Penerapan induksi Matematika dalam Pembuktian Matematika*

a. *Induksi Matematika Sederhana*

Induksi matematika ialah teknik untuk membuktikan proposisi dalam bentuk $\forall$ n P(n), dengan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan bulat positif. Suatu bukti dengan menggunakan induksi matematika bahwa " *P(n) benar untuk setiap n bilangan bulat positif terdiri dari tiga langkah: (1) Langkah basis: tunjukkan bahwa P(1) benar; (2) Langkah induktif: tunjukkan bahwa P(n) $\rightarrow$ P(n+1) benar untuk setiap n; (3) Konklusi:*
$\forall$n P(n) bernilai benar".

Contoh kasus:
Berapakah jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama?
Solusi:
Tebakan: "jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2".
Bukti:
Misalkan P(n): proposisi "jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2"

1. Langkah basis:
   P(1) benar, karena $1=1^2$
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(n) benar untuk semua k, yaitu 1+ 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2. Kita perlu menunjukkan bahwa P(n+1) benar, yaitu: 1+ 3+ 5+ ...+ (2n-1)+ (2n+1) = $(n+1)^2$.

1+ 3+ 5+ ...+ (2n-1)+ (2n+1) = n^2 + (2n+1)

3.Konklusi
"Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2"

b. *Induksi yang Dirampatkan*

Induksi yang dirampatkan merupakan prinsip kedua dalam induksi matematika. *"Misalkan P(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat n $\geq$ n_o. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa: (1) P(n_o) benar, dan; (2) untuk semua bilangan bulat n $\geq$ n_o, jika P(n) benar maka P(n+1) juga benar".*

Contoh kasus:
Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Solusi :

1. Basis induksi.

Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$. Ini jelas benar, sebab

$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$

2. Langkah induksi.

Andaikan bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$ juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$

$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$ (dari hipotesis induksi)

$= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1$

$= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1$

$= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

3. Konklusi

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

c. *Induksi Kuat*

Bentuk lain dari induksi matematika yang sering dipergunakan dalam bukti yaitu induksi kuat atau prinsip ketiga dari induksi matematika. Tahapan pengerjaannya yaitu: (1) Langkah basis:

Tunjukkan bahwa P(0) benar; (2) Langkah induktif: Tunjukkan bahwa jika P(0) dan P(1) ... dan P(n) benar, maka P(n+1) untuk setiap $n \in N$; (3) konklusi: $\forall n$ P(n) bernilai benar.

Contoh Kasus:

Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan -bilangan prima.

Solusi :

Misalkan : P(n): proposisi “setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima”.

1. Langkah basis:

P(2) benar, karena 2 adalah hasil kali dari satu bilangan prima, dirinya sendiri.

2. Langkah induktif:

Asumsikan P(j) benar untuk semua bilangan bulat j, 1 < j”n. Harus ditunjukkan bahwa P(n+1) juga

benar. Ada dua kasus yang mungkin:

• Jika (n + 1) *bilangan prima*, maka jelas P(n + 1) benar.

• Jika (n + 1) *bilangan komposit*, (n+1)
dapat ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat a dan b sehingga $2 \leq a \leq b < n + 1$. Oleh *hipotesa induksi*, a dan b keduanya dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan prima. Jadi, $n + 1 = a \times b$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan prima.

3. Konklusi:

“Setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima”.

d. *Induksi Umum Matematika*

“Hingga saat ini kita selalu menerapkan metode induksi hanya untuk permasalahan dengan parameter induksi berupa bilangan bulat posiif yang tentu saja sifat-sifat keterurutannya dapat kita telusuri dengan mudah. Sebenarnya PIM dapat digunakan dalam himpunan obyek yang lebih umum, hanya saja kita harus menjamin bahwa himpunan objek tersebut memiliki sifat keterurutan dan memiliki elemen terkecil”(Munir,2005)

Bentuk induksi secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan p(x) adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Kita ingin membuktikan bahwa p(x) benar untuk semua $x \in X$. Untuk menunjukkan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. p(x) benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X, dan

2. Jika p(y) benar untuk y < x, maka p(x) juga benar untuk setiap $x > x_0$ di dalam X, sehingga p(x) benar untuk semua $x \in X$.

Contoh Kasus:

Tinjau barisan bilangan yang didefenisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m= 0 \text{ dan } n= 0 \\ S_{m-1,\,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,\,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Buktikanlah dengan induksi matematika bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$

Solusi:

1. Langkah basis induksi: karena (0,0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0}= 0+0=0$. Ini benar dari defenisi $S_{0,0}$
2. Langkah induksi: Buktikan untuk semua (m,n) > (0,0) di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua (m’,n’) < (m,n) maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua (m’,n’). Ini adalah hipotesis induksi.Kita perlu menunjukkan bahwa:

   $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus I:

Jika n=0, maka dari defenisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$, karena (m-1,n) < (m,n), maka dari hipotesis induksi,

$S_{m-1,n} = (m-1) + n$ sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1= (m-1) + n + 1 = m+n$

Kasus II:

Jika $n \neq 0$, maka dari defenisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$, karena (m,n-1) < (m,n), maka dari hipotesis induksi,

$S_{m,n-1} = m + (n-1)$ sehingga $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) +1 = m+n$.

Karena kasus I dan kasus II sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$

C. KESIMPULAN

1. 77 Prinsip induksi matematika merupakan metode yang handal dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam matematika.
2. PIM dapat diterapkan secara bervariasi dan tidak kaku. Sejauh apa kita dapat menggunakan PIM bergantung pada kreativitas kita dan

kebutuhan dari permasalahan yang akan dipecahkan.

3. Dalam beberapa persoalan, tidak semua parameter yang terlibat dapat dijadikan parameter induksi. Kita harus memilih parameter yang dapat mempermudah kita dalam menyelesaikan masalah.
4. PIM dapat digunakan dalam himpunan obyek yang lebih umum, hanya saja kita harus menjamin bahwa himpunan obyek tersebut memiliki sifat keterurutan dan memiliki elemen terkecil.

DAFTAR PUSTAKA

Munir, Rinaldi. 2006. Buku Teks Ilmu Komputer Matematika Diskrit. Bandung: Informatika.

Wikipedia.2006.Mathematica induction. <http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_Induction>.

Wisnu. 2005. Persoalan atau Persoalan yang Lebih Sederhana. <http://www.geocities.com/akarnaise/paper/ak4-0.pdf>.

Matematika ITB. 2006. Induksi Matematika. <http://www.math.itb.ac.id/diskrit/kuliah4baru.ppt>.

Matematika ITB. 2006. Metode Pembuktian. <http://www.math.itb.ac.id/diskrit/kuliah2.ppt>.

Matematika ITB. 2006. Strategi Pembuktian. <http://www.math.itb.ac.id/diskrit/kuliah3baru.ppt>.